

# UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA PUEBLA

Estudios con Reconocimiento de Validez Oficial por Decreto

Presidencial del 3 de Abril de 1981



## ANÁLISIS DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA DESDE LA TEORÍA DE LA ACTIVIDAD

DIRECTOR DEL TRABAJO

Dra. Yulia Solovieva

ELABORACIÓN DE TESIS DE GRADO

que para obtener el Grado de

DOCTORADO INTERINSTITUCIONAL EN EDUCACIÓN

presenta

YOLANDA ROSAS RIVERA

Puebla, Pue.

2019

## Contenido

Resumen .....	5
Introducción .....	6
1. Planteamiento del problema .....	14
1.1 Antecedentes .....	14
1.2 Planteamiento del problema.....	36
1.3 Preguntas de investigación .....	38
1.4 Objetivos .....	39
1.4.1 Objetivo general.....	39
1.4.2 Objetivos específicos .....	40
1.5 Supuestos .....	40
2. Justificación .....	41
3. Marco teórico.....	48
3.1 Paradigma histórico-cultural.....	49
3.2 Teoría de la actividad.....	56
3.3 Teoría de la formación de las acciones mentales .....	59
3.4 Aportaciones a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.....	65
3.5 Método de enseñanza.....	71
4. Metodología.....	75
4.1 Tipo de investigación.....	77
4.2 Diseño de la investigación.....	78
4.3 Tipo de muestra .....	81
4.4 Instrumentos.....	87
4.5 Procedimiento .....	89
4.6 Contexto.....	101
4.7 Estrategia de análisis de datos.....	104
5. Resultados.....	113
5.1 Elementos del método de enseñanza por cada colegio .....	113
5.2 Método de enseñanza del colegio S .....	177
5.3 Método de enseñanza del colegio M.....	178
5.4 Método de enseñanza del colegio K .....	179

5.5 Retroalimentación .....	183
6. Discusión .....	187
Conclusiones .....	212
Referencias bibliográficas.....	216

## Índice de Apéndices

Apéndice 1. Entrevista para profesores	213
Apéndice 2. Protocolo de evaluación para alumnos de tercer grado de primaria	219
Apéndice 3. Hoja de observación de clase	223
Apéndice 4. Análisis de resultados por instrumentos aplicados en los tres colegios	224

## Resumen

El objetivo de esta investigación fue analizar desde la teoría de la actividad (Talizina, 2009) los métodos de enseñanza de las matemáticas en tres grupos de tercer grado de primaria para identificar las condiciones que favorecen u obstaculizan el desarrollo conceptual de los alumnos. Se eligió trabajar con un método de investigación cualitativa. Los participantes fueron tres maestras de tercer grado de primaria, con sus respectivos grupos (6-10 alumnos por cada grupo, entre 8 y 9 años de edad). Se realizaron observaciones de clases, una entrevista semi-estructurada a cada maestra y una evaluación dinámica sobre conceptos matemáticos a los alumnos. Los resultados mostraron que el método de enseñanza de un colegio se orienta hacia la automatización de algoritmos para solución de ejercicios, mientras que otro colegio intenta presentar el contenido matemático mediante la visualización concreta con manipulación de los materiales. En el tercer colegio se intenta una formación gradual de conceptos matemáticos teóricos con su aplicación en la solución de problemas. Se concluye que es posible sistematizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de cada colegio, así como identificar el desarrollo de conceptos matemáticos que los alumnos obtienen a partir de esa enseñanza.

**Palabras clave:** método de enseñanza, teoría de la actividad, escuela primaria, enseñanza de las matemáticas, teorías educativas.

## Introducción

De acuerdo con Gómez (2014), el conocimiento matemático facilita la comprensión de algunos aspectos del entorno de forma inmediata y mediata del alumno. A partir de la posibilidad para cuantificar diversos aspectos de la realidad, se puede comprender mejor esta misma; las matemáticas permiten comunicar de forma clara y precisa algunos datos que caracterizan a la realidad, ayudan a la invención y a la predicción. También, a nivel individual, el conocimiento de las matemáticas permite desarrollar la actividad intelectual, resolver problemas y descubrir nuevas formas de comunicación, es decir, permite el desarrollo psicológico y neuropsicológico de los alumnos en la escuela primaria (Ortiz, 2007; Zarraga, 2011; Lázaro, Solovieva y Quintanar, 2013).

En México, como en otros países, los alumnos de educación básica no siempre logran alcanzar con éxito el aprendizaje de las matemáticas y, frecuentemente, tienen dificultades para la ejecución de algoritmos, comprensión de conceptos matemáticos y para solucionar problemas aritméticos. Los resultados de las pruebas de rendimiento académico en matemáticas son desfavorables y solo enfatizan la necesidad de fortalecer, desarrollar o repasar los conocimientos no adquiridos por los alumnos, pero no existe una propuesta concreta sobre cómo desarrollar dichos conocimientos. Diversas investigaciones (Pehkonen, Näveri y Laine, 2013; García, Vázquez y Zarzosa, 2013; Solovieva, Lázaro y Quintanar, 2013; Silva y Rodríguez, 2011; Ávila, 2006, 2011) identifican esta ausencia como una tarea relevante en la enseñanza de las matemáticas y proponen indagar en las estrategias que emplean los alumnos para responder tareas matemáticas, conocer los métodos de enseñanza e identificar los factores que intervienen en las mismas.

Los autores citados coinciden en la opinión de que las matemáticas son más que sólo operaciones de cálculos y mecanizaciones de algoritmos, por lo que para una adecuada enseñanza y evaluación se debe considerar el desarrollo del pensamiento conceptual lógico de los alumnos, así como la identificación y relación entre los conceptos propios de la asignatura.

En esta investigación pretendemos aportar una aproximación al análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria. Partimos de la

idea de que los conceptos científicos son producto de un proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, son formados en las aulas escolares. Por esta razón, en el trabajo abarcamos los aspectos de ese proceso que van más allá de la sola planeación del maestro y de las habilidades que los niños han desarrollado sin relación aparente con el método de enseñanza, por ejemplo los estilos de aprendizaje. Al hablar de enseñanza-aprendizaje pretendemos conocer, cualificar y mostrar esa interacción que surge entre los maestros y alumnos, dando mayor participación al maestro, debido a que él es como el director de orquesta, el maestro organiza y dirige los conocimientos y acciones necesarias en cada asignatura. En este trabajo planteamos la siguiente pregunta de investigación ¿cómo es el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las escuelas primarias? Para construir la respuesta decidimos partir de una visión teórica que oriente y permita brindar un significado al proceso de enseñanza-aprendizaje. Es necesario posicionarnos en una visión teórica para mantener la objetividad y poder aportar al área educativa, de otra forma tendría solo un análisis empírico.

La forma teórica desde la cual partimos no es desde la Pedagogía (didáctica, prácticas educativas) ni desde la Psicología educativa cognitiva (estilos de aprendizaje, estrategias de aprendizaje), porque abordan la enseñanza y el aprendizaje como elementos aislados. Decidimos ubicarnos desde la Psicología educativa y específicamente desde la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza, la cual fue desarrollada por Talizina (2000, 2009, 2017) y basada en las premisas “enseñanza que desarrolla” (Elkonin, 2016; Valdés y Paulia, 2016) y “la única buena enseñanza es la que se adelanta al desarrollo” (Vygotski, 1984, p. 114). Desde este paradigma, uno de los objetivos del proceso de enseñanza-aprendizaje es la formación de conceptos y habilidades propias de cada asignatura, así como el desarrollo de la personalidad. Consideramos que este paradigma nos acerca de forma general y esencial al proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a que los maestros no existen de forma aislada de los alumnos o de los contenidos científicos.

Talizina (2009) ha desarrollado la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza y, bajo esta perspectiva, ha investigado la formación de conceptos matemáticos. Además, esta autora junto con colaboradores han organizado programas formativos sobre conceptos y habilidades aritméticas y geométricas en diferentes grados

académicos (Talizina, 2017; Salmina, 2017; Butkin 2017; Valadarskaya, 2017). A partir de la aplicación de esos programas se han identificado los conceptos y habilidades matemáticas que son posibles de enseñarse en la escuela, como contenido esencial, así como el tipo de orientación y las acciones necesarias para formar dichos conceptos.

Estas investigaciones han servido de referencia para organizar programas de formación de habilidades y conceptos matemáticos en México, específicamente en la maestría de Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica, como aportaciones al área de prevención de problemas de aprendizaje en la edad escolar y preescolar. Las investigaciones que se han realizado son Ortiz (2007), Zárraga (2011) y Rosas (2013), quienes trabajaron con alumnos de primer grado de primaria, tercero de preescolar y segundo de primaria correspondientemente.

Los trabajos previos proponen la consideración novedosa del proceso de formación gradual de los conceptos o habilidades matemáticas de acuerdo con el tipo de orientación (completa, independiente y generazible) (Talizina, 2009). Se consideran las acciones intelectuales con el contenido de las matemáticas necesarias (materiales, materializadas, perceptivas y verbales externas) y la evaluación del grado de adquisición y reflexión sobre dichos conceptos en los alumnos de la escuela primaria (método de constatación, solución de tareas más complejas, comparación con grupo control) (Talizina, 2000).

Las investigaciones de Talizina (2017), Salmina (2017), Rosas (2013), Zárraga (2011) y Ortiz (2007) nos han dado la posibilidad de organizar el objeto de estudio del presente trabajo, debido a que desglosan las acciones y contenido matemático y muestran las condiciones necesarias para formar los conceptos. Particularmente, analizar los resultados en la formación de conceptos matemáticos que han obtenido las investigaciones mencionadas nos ha llevado a considerar e identificar qué elementos son comunes entre ellos y cuál es su relación con la formación de conceptos y habilidades matemáticas que logran los alumnos. A partir de esto logramos identificar la estructura de esos programas formativos como una forma de organizar y analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los maestros dentro del aula. Esto puede llegar a ser una orientación que permita al maestro conocer su

forma de enseñanza (método de enseñanza) y los resultados que obtiene con la misma.

Una vez que identificamos la estructura y los elementos de los programas formativos fue posible establecer la propuesta del concepto de métodos de enseñanza, entendiendo éste como la forma de organización y sistematización del conocimiento científico de una asignatura. Dicha organización puede permitir de forma acertada o errónea la preparación de los conocimientos a los alumnos. Desde este punto de vista es posible estudiar y precisar los elementos esenciales que favorecen la formación de dicho conocimiento. El concepto de método de enseñanza nos permitió conocer la forma de enseñar que los maestros utilizan, así como los resultados que obtienen con este proceso (aprendizaje en alumnos).

Así, planteamos el concepto de método de enseñanza como la organización del conocimiento de una asignatura y el sistema de acciones que utiliza el maestro para formar los conceptos de un asignatura. En esta investigación proponemos considerar como contenido de los métodos de enseñanza los siguientes elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje:

- 1) tipo de orientación que el docente utiliza (Galperin, 2009; Talizina; 2009; Solovieva, 2004; Solovieva y Quintanar, 2018)
- 2) contenido estructural y sistematización de la asignatura (conceptos) (Solovieva, 2015)
- 3) tipo de acciones que utilizan para la adquisición de conceptos (Talizina, 2009)
- 4) tipo de colaboración que transcurre en el aula (Solovieva y Quintanar, 2014, 2016)

Una vez identificado nuestro objeto de estudio (método de enseñanza) fue necesario plantear la forma de investigarlo en el contexto escolar. Sabemos que una de las principales observaciones sería la propuesta teórica en la que nos basamos, debido a que no es conocida ni considerada en los programas de enseñanza de educación básica en México. El énfasis de esas observaciones se relacionó con la desarticulación entre la teoría en la que nos basamos (Teoría de la actividad) y lo que estaríamos observando en las aulas escolares. Las maestras manejan otros elementos para enseñar, por lo que se tenían dos cuestiones: 1) que estuviéramos proponiendo una teoría que no se trabaja en el contexto escolar y 2) que emitiéramos

juicios personales sobre las maestras o colegios, concluyendo quién es mejor y quién peor.

La primera cuestión la trabajamos mediante la justificación de la selección de la teoría y de un colegio en especial. Desde la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza (Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010) se han investigado las condiciones necesarias para la formación de conceptos matemáticos, considerando también el proceso de enseñanza-aprendizaje como producto de la actividad que realiza el maestro conjuntamente con los alumnos, no como procesos aislados. Esta teoría no solo ha trabajado experimentos formativos en condiciones artificiales (fuera de aula escolar, actividades extra escolares), sino específicamente en el programa de Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica de la Universidad Autónoma de Puebla, como parte de la investigación interventiva, se han propuesto programas formativos de conceptos matemáticos, los cuales se aplican durante los ciclos escolares (Zárraga, 2011, Rosas, 2012). Por lo que, la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza tiene una aportación en los programas de enseñanza en un colegio particular ubicado en la ciudad de Puebla. Tanto en la teoría como en la práctica es posible observar y estudiar la formación de conceptos matemáticos que se realiza en ese colegio. Consideramos que debido a los resultados positivos de éste es posible identificar elementos que puedan ser abordados por maestros de otros colegios, y viceversa, que otros colegios puedan aportar elementos a este colegio. Para concluir este punto, la participación del colegio Kepler fue necesaria tanto por utilizar la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza como referente teórico y por permitir conocer concretamente el proceso de enseñanza-aprendizaje que surge en las aulas.

La segunda consideración fue más difícil de justificar porque sabemos que en toda investigación existe la subjetividad del investigador y de los participantes, sin embargo, intentamos tener mayor objetividad creando instrumentos a partir de una teoría que estudia el proceso de enseñanza-aprendizaje y utilizando, además, las categorías científicas propuestas en otras investigaciones. También durante la investigación tuvimos la oportunidad de comprender otras perspectivas teóricas y prácticas, así como estudiar su aportación al proceso de enseñanza-aprendizaje. Por último, existió constante comunicación con los participantes para que no

consideraran una crítica personal o comparación entre su forma de enseñar con otras. Las maestras aceptaron las observaciones y sugerencias. Jamás reportaron algún tipo de prejuicio o actitud negativa, todo lo contrario, les agradó el trabajo de retroalimentación y el que se realizó con los alumnos.

De esta manera, también consideramos necesario elegir otros espacios para identificar la forma de enseñanza que utilizan. Nosotros identificamos que los colegios que basan su enseñanza en el modelo Montessori obtienen resultados positivos en el aprendizaje de las matemáticas, siendo su principal objetivo el desarrollo del pensamiento lógico matemático (Kofa, 2017; Chavarría, 2012; Jaik, Serrano, López, Amancio, Gómez y Silva, 2008; González, 2001). Esta perspectiva Montessori se ha dedicado al área de profesionalización docente y como sabemos es un modelo innovador en los colegios, por lo que decidimos incluir un colegio que enseñara matemáticas desde esta perspectiva.

Cabe señalar que tanto el colegio Kepler como Montessori continúan siendo un fenómeno poco común en México. La mayor parte de la educación adopta el programa basado en competencias, teniendo como principal objetivo “el desarrollo de las competencias, el logro de los estándares curriculares y los aprendizajes esperados” p.33 (Santiago, McGregor, Nusche, Ravela y Toledo, 2012). Por esta razón, incluimos también este tipo de colegio y lo denominamos Colegio por Competencias (programa de la Secretaría de Educación Básica). De esta forma, estaríamos analizando el método de enseñanza de las matemáticas que las maestras utilizan en diferentes colegios privados, para tener tres visiones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas e identificar las condiciones (tipo de orientación, tipo de acciones, tipo de colaboración) que favorecen el desarrollo de conceptos matemáticos en los alumnos. Recordemos que dentro del método de enseñanza incluimos una dimensión sobre el aprendizaje que los alumnos logran, debido a que tanto el maestro como sus alumnos son participantes de dicho proceso, participantes de la actividad de estudio (Váldez, 2017).

Hemos decidido trabajar en el tercer grado de primaria porque es el grado en el que el programa de enseñanza de la SEP (2011) establece que los alumnos en este grado ya conocen y resuelven problemas aritméticos con las cuatro operaciones

matemáticas. Además, son los alumnos que se incluyen en las evaluaciones nacionales e internacionales.

El contenido de este trabajo fue organizado de la siguiente forma: en el capítulo 1 mencionamos las investigaciones que aportan al estudio de los métodos de enseñanza, específicamente de los elementos de análisis que hemos identificado desde la teoría de la actividad. Además, son investigaciones que parten de la concepción de que la labor del maestro es un factor de gran influencia para el aprendizaje de las matemáticas, siendo el maestro, quién tiene la posibilidad de organizar las condiciones para que los alumnos formen los conceptos matemáticos. La revisión de esos trabajos nos ayudó a organizar nuestro método de investigación. Este capítulo se concluye con la propuesta de nuestra pregunta de investigación, objetivos y supuestos.

En el capítulo 2 se refieren los elementos tanto teóricos como prácticos de la necesidad de estudiar los métodos de enseñanza de las matemáticas. Mostramos algunos resultados de evaluaciones nacionales e internacionales sobre el aprendizaje de las matemáticas que obtienen los alumnos mexicanos de tercer grado de primaria.

Posteriormente, presentamos en el capítulo 3 las premisas teóricas del paradigma histórico-cultural, específicamente de la teoría de la actividad y teoría de la formación de las acciones mentales por etapas, así como su relación en el desarrollo de los conceptos matemáticos y el desarrollo infantil.

En el siguiente capítulo (4) describimos la propuesta metodológica, el diseño de investigación y procedimiento. La posición metodológica fue en la perspectiva cualitativa, debido a que la pregunta busca el análisis de los elementos del método de enseñanza, así como la construcción del conocimiento y acercamiento activo del investigador con los participantes. Los instrumentos utilizados fueron: hoja que sistematiza la observación de clases, la entrevista semi-estructurada para docentes y una evaluación de conceptos matemáticos aplicada a los alumnos. También se describen a los participantes, el procedimiento correspondiente y estrategia de análisis de los datos.

En el capítulo 5 mostramos los resultados de esta investigación. Los resultados son organizados, primero como descripción de los elementos del método de enseñanza en cada colegio, y posteriormente se muestra una síntesis del método de enseñanza de cada colegio (Colegio S-competencias, Colegio M-Montessori y Colegio K-Kepler) Posteriormente, en el capítulo 6 se integran los resultados con el análisis de las investigaciones reportadas en el capítulo de antecedentes, con las premisas de la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza, así como las limitaciones y aportaciones de esta investigación. Finalmente, presentamos algunas conclusiones que surgen de esta investigación. Enfatizando en las condiciones que favorecen al desarrollo de conceptos matemáticos en alumnos de tercer grado de primaria.

## **1. Planteamiento del problema**

### **1.1 Antecedentes**

El trabajo conjunto entre las disciplinas involucradas en la educación para la generación de conocimiento y argumentación teórica, de acuerdo con Bodaliev (1978) deben considerar los siguientes aspectos: 1) la comprensión conceptual conjunta de los fines de la educación relacionados con el desarrollo del hombre; 2) el análisis de las características del proceso de desarrollo integral del hombre, como de sus interrelaciones y 3) el análisis de los factores incluidos en la educación que garantizan este desarrollo. La tarea de la educación, siguiendo al autor, consiste en investigar cuál es la relación que tiene uno u otro tipo de educación con el desarrollo de los alumnos, específicamente los que son organizados dentro del aula.

Dentro de las líneas de investigación que abordan esa relación entre la educación y el desarrollo de los alumnos han destacado los trabajos enfocados a la reorganización de los procesos cognoscitivos de los escolares mediante los métodos de enseñanza y organización del proceso de aprendizaje (Davíдов; 1988; Talizina, 2009; Elkonin, 2016). Es necesario que el investigador adopte una visión no solo de la educación sino del desarrollo psicológico. Esto conlleva a posicionarse en una teoría de la Psicología (Álvarez y Del Río, 2013). La estructura del contenido teórico es necesaria para obtener mayor objetividad. El conocimiento de los paradigmas hace posible conocer aquellos aspectos teóricos y metodológicos que aportan y que permiten el desarrollo de la Psicología en el contexto educativo. De acuerdo con Hernández (2006) el paradigma es la forma en que determinada comunidad científica percibe la realidad y posee una estructura definida compuesta de supuestos teóricos, fundamentos epistemológicos y criterios metodológicos. Los paradigmas identificados en la Psicología educativa son: el conductista, el humanista, el cognitivo, el constructivista y el sociocultural.

Los paradigmas que revisaremos serán el constructivista y el sociocultural debido a que son estas teorías las que normalmente se incluyen en las investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación básica (Ávila, Block y Carbajal, 2003), además de ser referentes para la organización de

programas y métodos de enseñanza. No obstante, es importante referir que para este trabajo incluiremos la revisión del paradigma histórico-cultural, el cual fue desarrollado por los seguidores de Vygotski (Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010), aunque este sea poco conocido en el área de la educación.

En resumen, el *paradigma constructivista* concibe al alumno como un ser activo, responsable de su aprendizaje, creador de significados y sentidos de lo que aprende. Se enfatiza que el alumno necesita de otros para que le ayuden a formar las representaciones y pueda construir esos significados matemáticos (Castaño, 2008; Suhit y Bainaly, 2005). Uno de los contenidos más importantes que se investiga desde esta perspectiva es la adquisición de los conceptos numéricos iniciales, por lo que es necesario observar lo que el niño aprende de las relaciones entre los objetos de su contexto y el nivel alcanzado de su inteligencia (Solovieva, Ortiz y Quintanar, 2010). Las investigaciones de Contreras y Contreras (2011), García (2011), Nolasco (2005) y Buenrostro (2003) son ejemplos de estudios que se han ocupado de describir el proceso de cómo los alumnos asimilan el contenido matemático, es decir, qué estrategias son más funcionales para ellos, y a partir de éstas, proponer métodos de intervención, por ejemplo de enseñanza. Los métodos de investigación en la que se basan estos trabajos son cualitativos y se enfatiza en el uso de situaciones didácticas.

En relación con el estudio del conocimiento numérico y sistema numérico decimal, Butto y Gómez (2011) consideran que los profesores de matemáticas deben conocer las habilidades y estrategias que tienen los alumnos para crear programas de enseñanza. Los autores han investigado las representaciones numéricas que poseen los alumnos de primer grado de primaria y a partir de sus resultados proponer elementos para el diseño de métodos de enseñanza. Los resultados de dicha investigación muestran que los alumnos tienen un dominio de la secuencia numérica verbal y del proceso de conteo, así como el reconocimiento de las propiedades de las cantidades cerradas (decenas, centenas, unidades de millares), una escritura extendida de las cantidades que se les mencionan (por ejemplo, mil quinientos lo escriben 1000500), la lectura de cantidades la realizan segmentando en números de una o dos cifras, resultados similares han sido reportados por Castaño (2007).

En otra investigación, García (2011) observó datos semejantes sobre las dificultades que presentan los alumnos de segundo grado de primaria para la comprensión del valor posicional. Este autor reporta que los niños resuelven problemas de adición aun sin conocer el sistema numérico decimal ni el algoritmo formal, la estrategia más utilizada por los alumnos es el conteo de dedos, dibujos personales y cálculos mentales.

El análisis de Silva (2009) sobre las investigaciones en México acerca de la solución de problemas señala que éstas se dirigen hacia la descripción del proceso de construcción del conocimiento que realiza el alumno, específicamente en las estrategias de solución que desarrollan. Los resultados evidencian la falta de organización en el pensamiento de los alumnos, dificultades en la comprensión del problema, estrategia de estimación, y se enfatiza en la parte mecánica (ejecución de pasos y/u operaciones aritméticas). Resultados similares se han observado en investigaciones internacionales (Castro, 2007).

García (2011) concluye que es necesario trabajar en contratos curriculares, en el cual el profesor, los contenidos académicos y el alumno formen un triángulo interactivo. Señala que es necesario considerar las matemáticas naturales de los niños, es decir, aquellas habilidades que los niños desarrollan fuera de la escuela para integrarlas en el proceso de enseñanza (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2011). Los elementos socioculturales han sido elementos que se han incluido en las investigaciones actuales, debido a que permiten dar un sentido al uso de las matemáticas por parte del sujeto que aprende. Esto dio paso al énfasis del proceso de construcción social del conocimiento (perspectiva socioepistemológica). Actualmente, la socioepistemología postula que los conceptos pueden ser transferidos a distintos ámbitos de la vida cotidiana (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015).

Como hemos descrito, algunos de los objetivos de las investigaciones referidas son la contribución de elementos (estrategias, errores, aplicación, contenido matemático) para la organización de métodos de enseñanza de las matemáticas.

Específicamente las investigaciones sobre los métodos de enseñanza son escasas, no obstante, se han identificado los trabajos de López y Alsina (2015) quienes abordan diversos enfoques relacionados al paradigma constructivista, en los cuales

los maestros basan su forma de enseñanza. En la tabla 1 se presentan y comparan 4 enfoques sintetizados por Castro (2007).

Tabla 1. Comparación de los enfoques de acuerdo con Castro (2007).

Enfoque	Objetivos del aprendizaje de las matemáticas	Percepción del alumno	Percepción del maestro
Enfoque de destrezas	Memorización de destrezas a partir de la repetición. Tiene como objetivo adquirir un conjunto de fórmulas y procedimientos	Alumnos como seres vacíos sin capacidad de comprender por sí mismo los conocimientos matemáticos.	Maestro como entrenador de habilidades sin sentido para los alumnos
Enfoque conceptual	Adquisición de conceptos y la comprensión de procedimientos	Alumnos que son capaces de comprender y dar significado a los conocimientos matemáticos	Maestro enseña a partir de dibujos o materiales manipulativos.
Enfoque resolución de problemas	Introducir a los alumnos en la actividad matemática mediante la resolución de problemas reales y cercanos	Alumnos poseedores de la capacidad de construir sus propios conocimientos. Principal protagonista de su aprendizaje	Es acompañante
Enfoque investigativo	Las matemáticas como un proceso de investigación.	Los alumnos deciden el camino que deben recorrer en su proceso de aprendizaje. Además, ellos llegan a sus propias	Maestro como un orientador

Enfoque	Objetivos del aprendizaje de las matemáticas	Percepción del alumno	Percepción del maestro
		conclusiones mediante la reflexión, el razonamiento, la representación y la resolución de problemas.	

Nota: En, Castro (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 11, pp. 59-77.

Considerando las características referidas de cada enfoque, es posible identificar las estrategias y recursos que los maestros utilizan para el proceso de enseñanza, además de los tipos de ayudas (cuadernos de actividades, materiales manipulativos, etc.). Se observa que todos los enfoques mencionados consideran los estilos de aprendizaje de los alumnos y sus contextos de vida para mejorar el proceso de aprendizaje.

A partir de este marco referencial los autores (López y Alsina, 2015), se propusieron identificar cómo influye el método de enseñanza, específicamente los andamios, que ofrecen los maestros en el aprendizaje matemático de los alumnos. Los métodos que se identificaron en las aulas españolas de educación infantiles fueron: a) los cuadernos de actividades (CA) vinculado al enfoque de destrezas, b) las actividades de manipulación y experimentación (ME) relacionados al enfoque conceptual, y c) los rincones de trabajo (RT), que combinan los planteamientos de los enfoques de resolución de problemas e investigativo. El estudio se basó en la metodología cuantitativa, se utilizó un diseño cuasi-experimental con un pre-test y un post-test. Los participantes fueron 149 alumnos de tercer grado de educación infantil de seis Escuelas Públicas de la provincia de Girona y sus respectivas maestras. Se seleccionaron tres maestras de cada método de enseñanza (CA, ME y RT), ninguna maestra hace uso exclusivo de un solo método, sino que combinan varios, aunque fue posible identificar el método principal. El pre test se realizó a mediados del ciclo escolar a partir de los informes de evaluación que se entregan a los alumnos. En el post-test se aplicó la prueba de Evaluación Matemática Temprana (TEMT) de

Utrecht, la cual consta de 40 ítems divididos en 8 subgrupos de actividades: conceptos de comparación, clasificación, correspondencia uno a uno, seriación, recuento verbal, recuento estructurado, recuento resultante y conocimiento general de los números.

Los resultados muestran que el método de enseñanza basado en rincones de trabajo (RT) favorece el aprendizaje de las matemáticas de forma estadísticamente significativa en relación con los otros dos métodos, debido a que este método se caracteriza por tener tipos de ayuda (*andamios*) como preparar materiales adecuados, organizar bien el espacio, fomentar la verbalización y la representación, respetando la zona de desarrollo próximo de cada alumno y favoreciendo su aprendizaje. En cambio, en el método de cuadernos de actividades prevalece la instrucción matemática, lo cual se ha relacionado con dificultades en la comprensión de la utilidad y sentido del alumno, además de ser considerado como solo la transmisión de conocimientos (predomina la explicación del docente). En relación con el método de manipulación y experimentación, se refiere que su uso es inadecuado por algunos docentes, debido a que usar material no siempre conlleva al aprendizaje ni a la autonomía, en este estudio se infiere que el material fue utilizado como objeto y sin dirección del maestro.

A partir de estos resultados los autores López y Alsina (2015) sugieren que futuras investigaciones realicen un análisis cualitativo de las ayudas proporcionadas por las maestras en función de los métodos para identificar cuáles estrategias (*andamios*) contribuyen en mayor medida al desarrollo del pensamiento matemático.

El estudio anterior (López y Alsina, 2015) es una aproximación hacia la investigación de los métodos de enseñanza en matemáticas, aunque su análisis es cuantitativo permite organizar el procedimiento para relacionar los métodos de enseñanza con el aprendizaje de los alumnos, atribuyendo los resultados de las habilidades matemáticas a los métodos, partiendo de la idea de que las maestras utilizan un enfoque para enseñar las matemáticas.

No obstante, es necesario analizar y conceptualizar los métodos de enseñanza, es decir, identificar cuáles son sus componentes, además de sólo mencionar el papel del maestro y las didácticas comunes. En todos los trabajos mencionados se deja lado la parte orientativa que el alumno requiere para acceder al contenido esencial

de las matemáticas. Estos componentes de los métodos de enseñanza han sido investigados desde la teoría de la actividad psicológica (Talizina, 2009; Leontiev, 2006; Galperin, 2009). También es posible enfatizar en las aportaciones de la Psicología de este enfoque para el diseño y aplicación de los métodos de enseñanza novedosos para distintas materias escolares (Solovieva, 2016, 2015).

En el paradigma histórico-cultural se ha identificado como principal representante a Vygotsky (Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010) y las investigaciones que se describen consideran las premisas básicas de este autor. Vygotsky (1995) investigó el uso y el lugar de los principios psicológicos en el campo pedagógico. También, planteó que el ser humano se desarrolla a partir de la apropiación de instrumentos (físicos como herramientas y psicológicos como medios o signos). Dicho proceso de apropiación siempre es de origen sociocultural y se realiza en forma de diversas actividades prácticas y relaciones sociales.

Por primera vez en la Psicología Vygotsky (1984) menciona que las actividades educativas pueden ser tanto favorables, como desfavorables para el proceso de adquisición de conceptos. Profundizando esta idea, los seguidores de Vygotsky (Davíдов, 1974; Talizina, 2009; Galperin, 2001), han estudiado los efectos de diversos métodos de enseñanza sobre los sistemas de concepto que se forman en los alumnos. Desde el tiempo de Vygotsky (1984), se inició el estudio de las condiciones favorables que permitan garantizar mejor nivel de adquisición de sistemas de conceptos, entre otras áreas, de los conceptos matemáticos.

El objetivo principal de la educación formal se dirige hacia el desarrollo de las funciones psicológicas superiores mediante el uso funcional, reflexivo y descontextualizado (conceptual y teórico) de instrumentos. Se considera que las estrategias y técnicas de enseñanza se fundamentan en la creación de la zona de desarrollo próximo de los alumnos. Se caracterizará más profundamente este paradigma en el marco teórico así como se incluirá las aportaciones de los seguidores, específicamente de la teoría de la actividad (Leontiev, 2006; Talizina, 2009) y la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas (Galperin, 2009).

A continuación presentamos las investigaciones basadas en este paradigma que muestran el papel del docente en el aprendizaje de las matemáticas, aunque no se

identifica un método de enseñanza es posible tomar sus resultados como aportaciones o introducción a los elementos que influyen y que se relacionan con el aprendizaje de las matemáticas.

Algunas investigaciones enfatizan que el aprendizaje de las matemáticas requiere de un proceso sistematizado de enseñanza que permita formar la comprensión de los conceptos y las relaciones numéricas, en el cual se considere el desarrollo cognitivo del individuo. Específicamente la aritmética debe ser transmitida como un conocimiento social, no solo considerar si resuelve correctamente un ejercicio o si repite por memoria los algoritmos.

Retomando a Vygotsky (1995), se considera que la aritmética se construye a partir de la interacción con el docente para que posteriormente el alumno asimile ese conocimiento y lo ponga en práctica de forma independiente, este proceso se conoce como interiorización.

En relación con la enseñanza de la aritmética, Rangel y García (2014) diseñaron un sistema de apoyo pedagógico para favorecer la construcción de número a partir de la manipulación de material concreto, desarrollar la comprensión del sistema numérico decimal mediante el empleo de juegos y materiales, y lograr la resolución y construcción de problemas. La investigación tuvo un diseño cuasi-experimental y se realizó con 26 niños y 25 niñas de edades entre 6 y 7 años, en una escuela primaria. Se aplicó un pretest-postest con grupo control. Se aplicó una prueba de solución de problemas, compuesta de cuatro problemas (dos de estructura aditiva de cambio y dos de combinación). Los resultados fueron: mejoría en la resolución de problemas, el 38% de los alumnos lograron puntajes altos en el post-test, además solo el 4% de los alumnos del grupo experimental obtuvo puntaje bajo mientras que el grupo control, obtuvo el 12%. Se realizó también un análisis del agrado y desagrado hacia las matemáticas, encontrando que el 48% del grupo experimental muestran un agrado mientras que el grupo control obtuvo el 35%. Se concluye que el apoyo y estrategias de andamiaje permiten al alumno acceder a un conocimiento más avanzado y fortalecer la búsqueda de alternativas de soluciones ante cualquier dificultad. El trabajo entre pares facilitó la claridad y asimilación de los conceptos. Por último, se enfatiza el uso de material concreto para la construcción del

pensamiento lógico matemático, así como considerar las habilidades que desarrollan los alumnos fuera del aula.

Desde el enfoque sociocultural la comunicación es fundamental para el aprendizaje. El alumno construye significados matemáticos a partir de la participación en las actividades culturales establecidas. Así, tanto el tipo de comunicación como actividades que involucren a los alumnos influyen en su desarrollo (Cobb, 1994, citado en Steele, 2001). A partir de esta descripción Steele (2001) muestra la interacción entre el profesor y los alumnos de cuarto grado. Las preguntas que guiaron su investigación fueron: ¿cuáles estrategias de enseñanza utiliza el maestro para desarrollar la comprensión de las matemáticas a partir de la comunicación? ¿Cuáles son las decisiones de enseñanza del profesor en la planeación de clases, el discurso del aula y la evaluación del aprendizaje? ¿Cómo es la enseñanza en el aula? y ¿qué relación existe entre las creencias de los profesores sobre cómo aprenden los alumnos y sus decisiones para la instrucción y prácticas en el aula? Para cumplir el objetivo el autor realizó la observación de una clase de profesores diferentes para seleccionar uno que trabajara con el enfoque sociocultural, además se aplicaron entrevistas para identificar el conocimiento que tenían sobre el mismo. Estas preguntas serán retomadas para nuestro estudio.

El método que se utilizó fue el interaccionismo simbólico, el cual permitió la formación de significados a partir de la comunicación y es compatible con el enfoque sociocultural. Los datos fueron recolectados a partir de la observación de los participantes, observación del profesor en clases de matemáticas durante cuatro meses y medio y se realizaron seis entrevistas, las cuales fueron video grabadas. Las entrevistas eran previas y posterior a la enseñanza, previas para averiguar cómo el maestro había planeado la lección siguiente y posterior para identificar la reflexión de lo que había planeado y enseñado, algunas preguntas de la entrevista fueron: ¿por qué decidió hacer esta tarea? ¿Hay algo en particular que está esperando que suceda hoy? ¿Qué podría interferir en su plan? ¿Hay algo que lo haya decepcionado? ¿Por qué? ¿Qué modificaría en sus futuras lecciones? ¿Cómo decidió quién pasar al pizarrón o para responder las preguntas?

Los resultados de las entrevistas y observación fueron la identificación de las siguientes estrategias, las cuales se resumen:

1) Uso de la *zona de desarrollo próximo*, la cual se reflejó en el establecimiento de fases para la solución de problemas, la primera fase consistió en la redacción de la información contextual y conocimientos previos de los alumnos. Fase dos, a partir del dibujo o escritura proponer procedimiento para la solución. Fase tres, el maestro establecía preguntas dirigidas para organizar el pensamiento (información central) de los alumnos, relacionar los conocimientos contextuales con los conceptos matemáticos. Fase cuatro, los alumnos interpretaban sus resultados y comparaban con lo demás, reflexionaban sobre sus procedimientos. Fase cinco, se establecía la estrategia de solución con la guía del maestro. Fase seis, a partir de la generalización los alumnos asimilan significados compartidos.

2) *Uso de la representación* en la solución de problemas, los alumnos lograron realizar diagramas, dibujo o escribir palabras para representar sus ideas, esto les permitió identificar y atender las características esenciales de una situación y compartirlas con sus compañeros.

3) Los diversos *medios de comunicación*, en la clase se observó que la comunicación no solo era verbal sino visual, esta última permite la comprensión matemática y no solo el lenguaje ordinario.

4) *Conocimiento del contenido matemático por parte del profesor*, se hace evidente que el conocer los temas que los maestros enseñan permite entender cómo los alumnos van aprendiendo, qué se les complica y cómo pueden guiar a los alumnos tanto para comunicarse como para solucionar las tareas, además considerar a los alumnos como capaces de construir significados culturales a través de la comunicación permitió a la profesora cumplir sus objetivos y dar coherencia en la práctica con el enfoque sociocultural.

En general se enfatiza que la clase de la profesora consistió en tener preparadas las tareas, tener conocimiento teórico de los mismos y tener como meta la reflexión consciente de los alumnos a partir de la comunicación. Este estudio permitió conocer las estrategias de una profesora que trabaja a partir del enfoque sociocultural y dar alternativas para la enseñanza en el aula.

Continuando con la importancia de la interacción entre maestro y alumno, así como entre alumno y alumno, la investigación de Ngee-Kiong, Singh y Hwa (2009) desde

la teoría de Vygotski se han enfocado en identificar cuáles son esas interacciones y los efectos en los alumnos. Se parte de la concepción de que los alumnos son quienes construyen activamente su conocimiento, a partir de esquemas mentales mediante la interacción con otros. Así como la idea de que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza social, en la cual existen aspectos fundamentales, por ejemplo, el profesor puede ser visto como un guía, el diálogo permite el análisis de los problemas, la formulación de posibles soluciones y justificación de las ideas que se generan, entre otros.

Los autores Ngee-Kiong, Singh y Hwa (2009) utilizan un enfoque cualitativo, específicamente la investigación-acción. Refieren que en Malasia una clase escolar típica de matemáticas consiste en la introducción de un nuevo concepto a partir de ejemplos, durante la cual los maestros dan instrucciones paso a paso; en seguida los estudiantes toman notas y resuelven problemas en el libro de texto junto con los maestros. Por lo que se propone el trabajo de observación con un profesor de 30 alumnos de secundaria. Se recogieron datos cualitativos utilizando tres métodos diferentes: grabaciones audiovisuales, observaciones y entrevistas. Se registró una clase de 80 minutos y dos clases de 40 minutos a la semana durante 10 meses, en total fueron 58 clases registradas. Posterior a la clase se mostraba el video al maestro para comentar los acontecimientos y negociar las clases posteriores, entre ellas el diseño de la instrucción y la integración de los comentarios de los alumnos. Para tener un análisis objetivo se realizaron algunas entrevistas a los alumnos, así se lograba incorporar sus recomendaciones.

Los autores anteriormente citados concluyen que es posible el trabajo en grupo mediante cuatro fases (fomentando la discusión grupal del tema, trabajo en grupo, realizar informe y resumen) para el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de secundaria. A partir de la negociación es posible llevar un proceso interactivo en el cual el alumno aprende, pero también enseña a través del diálogo. Esta herramienta favorece su argumentación, reflexión y consciencia de su propio aprendizaje. A pesar de ser un estudio en población secundaria esta investigación aporta al acercamiento con el trabajo de profesores para organizar los métodos de enseñanza, muestra la aplicación del enfoque sociocultural dentro del aula y aportará en el método de nuestra investigación.

Por otro lado, para que los maestros puedan incorporar la mediación y la comunicación en clases, necesitan tener conocimientos amplios de la asignatura que enseñan y de cómo deben enseñarlo, algunos investigadores (Banks, 2001; McKenzie y Scheurich, 2007, citados en Sueanne, et al., 2013) muestran que uno de los indicadores con mayor relevancia del logro académico es la calidad del proceso de enseñanza del profesor, disminuyendo la influencia del factor de contexto. La otra línea de investigación se ha direccionado a estudiar a los maestros que logran un aprendizaje en sus alumnos ante factores poco favorables (contexto) y contrastarlos con los maestros que llevan métodos tradicionales.

El estudio de Sueanne et. al. (2013) es ejemplo de esta línea de investigación. Los autores trabajaron con 62 maestros con las siguientes características: género (48 mujeres y 14 hombres), la edad (23 a 54 años), años de docencia (1 a 32 años) y raza (14 raza blanca, 42 afroamericanos y 2 hispanos). De los cuales 31 fueron identificados como sobresalientes (estrellas) y 31 no sobresalientes (no estrellas). Se les aplicó el Instrumento de evaluación de prácticas de instrucción de matemáticas (Cathcart, Pothier, Vance y Bezuk, 2006; Van De Walle, 2007; NCTM, 2000, Sueanne, et al., 2013) y una entrevista de selección de maestros sobresalientes (estrellas).

Los resultados mostraron diferencias estadísticamente significativas entre ambos tipos de maestros. Concluyendo que los maestros, que se consideran sobresalientes, utilizan prácticas de enseñanzas basadas en las normas de NCTM, por ejemplo, utilizan diversos enfoques de evaluación (autoevaluación, entrevistas y evaluaciones auténticas), los planes son creativos, abordan contenidos concretos y su transición hacia lo abstracto, uso de aprendizaje basado en problemas, fomentan la interacción social, uso de medios tecnológicos entre otros. Las aportaciones se dirigen hacia la necesidad de formar maestros sobresalientes que tengan como primer objetivo el estudiante y constantemente busquen metodologías y estrategias de enseñanza, no haciendo del contexto lo relevante ni justificando el poco éxito de los alumnos a partir de las condiciones socioeconómicas. Se propone el uso de instrumento de la entrevista de selección de maestros sobresalientes para valorar las habilidades del maestro.

Se puede concluir que las investigaciones basadas en el enfoque sociocultural se centran en la interacción entre el maestro y los alumnos, considerando que el maestro es un mediador y considerando al alumno como activo. Se establece que el aprendizaje formal debe formarse en las escuelas y dirigirse hacia el desarrollo, hacia lo que los alumnos aún no dominan. Lo anterior se contrapone al constructivismo, en el cual se establece que el aprendizaje es producto del conocimiento empírico-sensorial que el alumno va adquiriendo, independientemente del maestro y que éste siempre se debe basar en los aprendizajes previos elementales para que el alumno construya los aprendizajes más complejos (Hernández, 2006; Contreras, 1989).

Sin embargo, a partir de esta revisión no es posible identificar los métodos de enseñanza como se había establecido aunque si son una aproximación hacia sus elementos y sus procedimientos aportarán a organizar el método de nuestra investigación.

Existe otra teoría que ha continuado con el desarrollo de las premisas del enfoque sociocultural, la teoría de la actividad, la cual ha trabajado en la organización de los elementos que permiten al maestro y a los alumnos orientarse en las acciones necesarias para la formación de conceptos propios de una asignatura, por ejemplo, la teoría de la actividad ha aportado en la formación de las acciones mentales establecida por Galperin (2001; 2009). Esta teoría aborda el proceso de interiorización, del plano externo al interno, es decir cómo las acciones externas se transforman para ser mentales, lo que permite identificar el nivel de la acción y los niveles de ayuda para que llegue a ser una acción mental. Otras aportaciones se dirigen hacia el estudio de la enseñanza-aprendizaje como un proceso dialéctico y dinámico, en el cual el papel del maestro es organizar aquellos elementos que permiten al alumno orientarse y formar los conceptos de una asignatura.

Así, a partir de la teoría de la actividad, se han diseñado e implementado métodos de formación de habilidades matemáticas, en los cuales se muestra el contenido, la orientación y formas de las acciones que conllevan al desarrollo de conceptos y habilidades matemáticas en la edad escolar, específicamente de la aritmética. No obstante, siguiendo que todo aprendizaje es un proceso y que implica una historia de desarrollo, es necesario no solo revisar la edad escolar (educación básica) sino

conocer a partir de qué acciones se forman los conceptos matemáticos y conocer qué sigue después de formar dichos conceptos y habilidades en educación primaria.

Una línea de investigación de la enseñanza de las matemáticas se ha desarrollado en Rusia, los investigadores Nikola y Talizina (2017), Salmina (2017), Butkin (2017) y Valadarskaya (2017) han encontrado que la inadecuada formación de conceptos matemáticos y la falta de orientación en la enseñanza repercuten en el aprendizaje escolar. A continuación se describen los trabajos de estos autores.

El trabajo de Nikola y Talizina (2017) se dirige hacia la formación de las acciones orientativas necesarias para la solución de problemas aritméticos mediante la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas. En esta investigación, participaron alumnos de tercer y cuarto grado de primarias oficiales de Rusia. El método experimental tuvo dos fases: una de constatación que se realizó de manera individual (valoración de las habilidades desarrolladas de los alumnos), y la segunda de enseñanza experimental (aplicación del método general) que se aplicó de forma grupal. Además, en esta investigación no existió un grupo control a priori. El método de enseñanza consistió en la formación de conceptos generales de las magnitudes a trabajar (velocidad, tiempo y distancia), asimilación de las relaciones que existen entre ellas, asimilación de las relaciones entre el significado particular y general de cada magnitud y la formación del método general para la modelación de cualquier tipo de situación. Los resultados mostraron que los alumnos lograron la asimilación del método general y resolvían con éxito los problemas aritméticos, a diferencia de los demás grupos de tercer y cuarto grado.

Martínez (1984) considera que la enseñanza de solución de problemas debe realizarse desde los primeros ciclos de la escuela primaria. Su investigación consistió en mostrar que la metódica de Galperin y Gueorguiev crea las condiciones necesarias para la transición del pensamiento egocéntrico sobre las cosas a su valoración objetiva. Para ello, los autores trabajaron con alumnos prescolares mayores y de primaria menor. La investigación contó con tres procesos: constatación, formación y control. El análisis cualitativo y cuantitativo del proceso de constatación mostró que era necesario formar los conceptos y habilidades básicas matemáticas. La metódica de enseñanza consistió en el trabajo con identificación y uso de la medida, formación y comparación de grupos, formación de conceptos

matemáticos, trabajo de medición de magnitudes concretas y solución de problemas de suma y resta (directa e indirecta). Los resultados mostraron que el grupo de control cometió mayor cantidad de errores que el experimental. Los errores del grupo control consistían en invención de respuestas, incomprensión de lo que decían y confusión del uso de las operaciones aritméticas. A diferencia de lo anterior, el grupo experimental lograba explicar el proceso de solución de problemas, resolverlos en el plano mental y utilizar las operaciones aritméticas como medio para solucionar los problemas. La conclusión de este trabajo fue que mediante la orientación del proceso de enseñanza es posible que los niños alcancen a llegar a una valoración objetiva de sus propios razonamientos y la de sus compañeros.

Otros ejemplos sobre las propuestas de métodos de enseñanza de las matemáticas se observan en los trabajos sobre los contenidos del área de Geometría. Esta área de las matemáticas, de acuerdo con el análisis de Butkin (citado en Talizina, 2001) se ha enseñado de forma aislada y específica, similar al caso de la aritmética.

Butkin (2017), mediante la teoría de formación de acciones y conceptos mentales, analizó la habilidad de demostración en el curso inicial de geometría en la educación media, debido a que los alumnos presentaban dificultades para solucionar las tareas que implicaban las demostraciones de los teoremas de forma independiente, además eran incapaces de reproducir la demostración de un teorema conocido para ellos aunque este se acompañara del dibujo con otras letras o si el dibujo es cambiado de forma diferente. Estas dificultades habían sido estudiadas por Zikova y Kabanova-Meller (citados en Butkin, 2017) y fueron relacionadas a la formación inadecuada de conceptos, a la asimilación insuficientemente generalizada del teorema o con la ausencia de conceptos sistematizados. A partir de estos resultados Butkin se planteó el objetivo de la formación de un sistema complejo y válido de los conceptos geométricos iniciales.

Este autor considera la demostración de un teorema (o la solución de un problema de demostración) como la argumentación de la posición del teorema dado a través de axiomas, conceptos determinados o de posiciones geométricas demostradas. Los componentes que forman parte de la habilidad de demostración son: 1) la acción de conducir los fenómenos geométricos hacia el concepto. Demostrar, significa establecer si los fenómenos geométricos dados en las condiciones poseen las

características necesarias y suficientes del concepto que se busca, 2) el conocimiento de los sistemas de las características necesarias y suficientes geométricos que se buscan, 3) la habilidad de desplegar las condiciones, obtener el sistema de sus consecuencias y descubrir las características del concepto que se busca detrás de los conceptos que cumplen esas condiciones.

Para la organización del método se utilizaron problemas geométricos elementales y los teoremas de igualdad, se plantearon los siguientes objetivos: 1) garantizar la asimilación en los escolares de la acción de conducir hacia el concepto de la igualdad y, la comprensión del hecho de que, demostrar significa precisamente realizar la conducción hacia el concepto de igualdad, 2) favorecer a la asimilación de las características de la igualdad de las figuras geométricas, 3) lograr el dominio de la acción de desplegar las condiciones y la habilidad para encontrar en ellas, las características necesarias y suficientes de las figuras que se buscan. El método fue aplicado a 20 alumnos de quinto grado de la escuela media.

Los resultados mostraron que posterior al método de formación los alumnos lograban una búsqueda dirigida durante el proceso de la ejecución de la demostración geométrica, lo cual lograban a partir de la acción de desplegar con el apoyo en las zonas de búsqueda, además de la identificación de las características generales de la igualdad. También los resultados mostraron la adecuada asimilación del contenido de los alumnos, así como el incremento del nivel del pensamiento geométrico.

De igual forma Valadarskaya (2017) considera que en la enseñanza de la geometría no se ha considerado la formación de conceptos y habilidades, en su caso enfatiza en las transformaciones geométricas. El objetivo de esta investigación fue estructurar el estudio de las transformaciones geométricas elementales, en primer lugar, por la identificación de las unidades básicas del material del área de los conocimientos y de las reglas, así como su combinación en fenómenos concretos en el momento inicial de la enseñanza. Las unidades básicas del material son todos aquellos elementos y condiciones objetivas que son esenciales para cualquier fenómeno en una rama determinada de los conocimientos, y que descubren las particularidades específicas de la materia que se estudia.

El método consistió en la búsqueda independiente de la combinación concreta de las unidades básicas del material para cualquier fenómeno. La orientación se caracterizó por: 1) la formación del método de análisis del material, es decir, la formación de las habilidades para identificar las unidades básicas del material y las reglas de su combinación y 2) la formación de la habilidad para utilizar este método en cualquier fenómeno del área dada de conocimientos, es decir, la formación de la habilidad para construir independientemente la base orientadora completa, para cada uno de estos fenómenos. La organización de la formación de la habilidad generalizada exigió a los alumnos la asimilación del sistema de conceptos y acciones: concepto acerca de la figura orientada, el concepto de vector, ángulo dirigido, sus igualdades y las reglas de su construcción; el concepto de distancia entre figuras, el concepto de congruencia (homotecia) y otros. Estos conceptos fueron formados antes de aplicar el método para el estudio de las transformaciones. El programa se realizó con 10 niños en sesiones individuales y también con 40 alumnos en condiciones de experimento grupal, fueron repartidos en dos grupos, el primer de 16 y el otro de 24.

Los resultados obtenidos fueron 182 tareas con solución correcta y argumentada de 192. Se realizaron ejercicios de verificación del carácter estable a los dos meses y medio de la enseñanza y se evidenció una consolidación de las acciones trabajadas. De esta forma en lugar de enseñar los tipos aislados de transformaciones geométricas se hace posible presentar un método generalizado que permite realizar todas las transformaciones incluidas en el programa escolar de manera razonable y consciente.

En México también se ha desarrollado la línea de investigación sobre la formación de conceptos y habilidades matemáticas en alumnos preescolares y escolares. Esta línea ha surgido en Puebla, México, por un grupo de seguidores de Vygotsky y continuadores de este autor (Leontiev, 2003; Davídov, 1988; Galperin, 2009; Talizina, 2009; Salmina, 2017). Los estudios han utilizado el diseño experimental formativo, propuesto por Vygotsky (2006) y desarrollado por sus seguidores (Leontiev, 2003). El experimento formativo consiste en la organización cualitativa de una interacción activa entre el investigador y el alumno, planteada bajo parámetros establecidos por los objetivos del experimento y basados en las necesidades de la

práctica educativa real. Para ello se requiere que el investigador conozca el contenido, la estructura y las características necesarias de las acciones que se pretenden desarrollar en el alumno (Talizina, 2000; Nikola y Talizina, 2017; Solovieva, 2013).

En la edad preescolar se ha propuesto la formación de habilidades generales a partir de cuatro componentes identificados: matemático, lógico, espacial y simbólico (Solovieva, Ortiz y Quintanar, 2010). Algunas de las tareas que se incluyen en el método de formación de dichas habilidades están: descripción de objetos a nivel concreto, identificación de características esenciales de los objetos, clasificación de objetos en base a distintos criterios, identificación del lugar que se ocupa en filas de teatro o cine, juego de roles, correspondencia de uno a uno de elementos de diversos conjuntos, ordenación de cuadros de imágenes, entre otros. A partir de estos componentes se han organizado métodos de enseñanza en niños bilingües (náhuatl-castellano) de primer grado de primaria (Ortiz, 2007) y posteriormente a niños preescolares de una zona suburbana (Zárraga, 2011).

En el estudio de Ortiz (2007) se trabajó con 46 alumnos bilingües (náhuatl-castellano), en una escuela ubicada en una comunidad de San Isidro, Tlaxcala. Los participantes tenían entre 6 y 7 años de edad y cursaban el primer grado de primaria, fueron repartidos al azar en dos grupos (experimental y control). La mayoría de los niños no habían cursado el preescolar. El método propuesto incluía los cuatro componentes matemáticos y se realizaron las siguientes acciones: a) identificación, comparación y diferenciación de las características en los objetos, b) identificación, comparación y diferenciación de las relaciones espaciales entre los objetos, c) correspondencia recíproca de acuerdo con distintas características, d) ordenación de conjuntos, e) medición de diversos objetos. Todas estas acciones fueron en el plano material, materializado y perceptivo. El trabajo formativo se realizó en sesiones y horarios regulares con la frecuencia de tres veces por semana durante un periodo de 6 meses. El maestro titular y el aplicador del programa participaban en todas las sesiones que se replicaban en ambos idiomas, permitiendo el libre uso del náhuatl y del castellano.

Los resultados posteriores a la intervención mostraron que los alumnos desarrollaron las habilidades matemáticas previas al concepto de número, enfatizando en el

desarrollo del componente simbólico, no como asociación gráfica sino como representación de las cantidades que surgen de ciertas acciones. Los autores concluyen que el éxito y plano intelectual en el que se realiza una tarea depende del esquema de la base orientadora de la acción organizada por el maestro y no simplemente de las características sociales o ambientales (Solovieva, Ortiz y Quintanar, 2010).

El trabajo de Zárraga (2011) consistió en aplicar el método anterior en la edad preescolar. La investigación se realizó con un grupo de 30 niños que asistían a una primaria en la zona de San Pablo del Monte caracterizada por ser zona sub-urbana. Los alumnos fueron repartidos al azar en dos grupos: control y experimental-formativo. El método consideró la base orientadora de la acción completa y generalizable de acuerdo con la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas. Inicialmente se trabajaron tareas en el plano concreto a través de actividades de juego y posteriormente en el plano perceptivo, completando con actividades lúdicas con tareas de enseñanza formal. Los resultados evidenciaron que los alumnos después de participar en el experimento formativo, lograron ejecutar las tareas de manera independiente (identificar el número ordinal, posicionamiento del número en la recta numérica, igualación de conjuntos, seriación gráfica, entre otras), además desarrollaron la función simbólica (Zárraga, Quintanar, García y Solovieva, 2012).

Los resultados de estas investigaciones muestran que los niños adquieren las habilidades previas al concepto de número, como la seriación, correspondencia recíproca, conservación, función simbólica, entre otras. Además, se muestra que ambos métodos influyen en el desarrollo neuropsicológico de forma positiva, desarrollando habilidades espaciales (análisis, integración de los elementos y su ubicación dentro del dibujo), organización de la información y estrategias de recuperación de la misma (memoria mediatizada). Otros resultados a destacar es que a pesar de estar en condiciones socioeconómicas poco favorables este factor no fue obstáculo para el desarrollo de las habilidades matemáticas en los alumnos que participaron. Los autores Ortiz (2007) y Zárraga (2011) atribuyen los resultados a la implementación de los métodos de enseñanza.

En relación con el factor socioeconómico de los alumnos, otra investigación ha mostrado que la organización de un método y dirección del proceso de asimilación son más relevantes para la formación de conceptos matemáticos e incluso en alumnos con dificultades de aprendizaje. La investigación de Rosas y Rosas (2010) consistió en la formación del concepto de división partitiva en 25 niños de tercer grado con bajo rendimiento en matemáticas, los alumnos asistían a una escuela que se caracteriza por ser sub-urbana, en la zona de Chimalhuacán, Estado de México. La organización del método incluyó las características esenciales de la división: ¿existe algo que se reparte? (Dividendo), ¿existe la cantidad entre quién se reparte? (Divisor), ¿te pide descubrir cuánto le toca a cada uno? (Cociente). Estas características se daban en un mapa escolar y ante enunciados y problemas, los alumnos las identificaban. Una vez que se identificaba la división partitiva los alumnos procedían a realizar el algoritmo, el cual fue desplegado por pasos y trabajado desde el plano materializado hasta el plano verbal externo.

Los resultados mostraron que los alumnos antes de la intervención cometían rotaciones de números, no conocían el algoritmo de división o confundían los componentes, su lectura de los problemas era adivinatoria, no identificaban la operación correcta de acuerdo con el problema, tenían dificultades en la secuenciación regresiva y una actitud negativa hacia las matemáticas. Estas dificultades fueron superadas posteriores a su participación, los alumnos lograban resolver correctamente y de forma independiente las tareas en el plano verbal externo, solo algunos lograron la ejecución en el plano mental. También se reporta un efecto positivo en su actitud, los alumnos lograban redactar sus propios problemas y ayudar a sus compañeros para realizar las divisiones.

La continuación de las investigaciones de formación de habilidades matemáticas (Ortiz, 2007; Zarraga, 2011) se ha dirigido hacia el trabajo para formar conceptos matemáticos (número, concepto de sistema numérico), acciones matemáticas (suma, resta, multiplicación y división), así como la solución de problemas aritméticos.

En la investigación de Rosas (2012) se ha organizado un método para la enseñanza de los conceptos y acciones matemáticas anteriores. La escuela en la cual se realizó el experimento formativo está ubicada en Puebla, el colegio pertenece a una zona

urbana. El método se trabajó durante un ciclo escolar de acuerdo con la SEP, tres veces por semana. La base orientadora de los métodos consistió en identificar aquellas acciones necesarias para cada tema matemático, se trabajaron con tarjetas de orientación que incluían los elementos esenciales de los conceptos y las acciones necesarias para resolver las tareas. Por ejemplo, para la formación del concepto de número y sistema numérico decimal se incluyó la acción de medición, la cual se trabajó desde la etapa materializada (uso de cerillos) hasta la verbal externa (escritura). A partir de la relación entre los componentes de la acción de medición: la magnitud, la medida y la cantidad de veces se introdujeron las acciones de multiplicación, división, suma y resta (Rosas, Solovieva, García y Quintanar, 2013). Por último se desarrollaron las habilidades generales para la solución de problemas aritméticos, mediante la elaboración de tarjetas de orientación. Como última tarea ellos elaboraban problemas a partir de datos dados por la maestra y a partir de sus intereses (Solovieva, Rosas y Quintanar, 2016).

A partir de los resultados se concluyó que la acción de medición es necesaria para la adquisición de los conceptos matemáticos, además de mostrar que las relaciones entre los componentes del concepto de número permiten formar las operaciones matemáticas, y los elementos orientativos para la solución de problemas.

La organización del contenido y orientación del mismo no solo se ha dado en el área de las matemáticas, otros investigadores han propuesto el desarrollo de protoconceptos históricos en la edad preescolar (Cervantes, 2009), la enseñanza del lenguaje escrito (Solovieva, 2016), la enseñanza de la lectoescritura (Solovieva y Quintanar, 2010), método de dibujo (Solovieva, 2016) y estrategias introductorias para la enseñanza del idioma inglés (Solovieva, 2015). Todos estos métodos consideran la organización del contenido, la identificación de las acciones necesarias y los planos de ejecución (material-verbal externo), así como la orientación completa e independiente, además de ser producto de experimentos formativos y con resultados positivos en el desarrollo (Venger e Ibatullina, en Solovieva y Quintanar, 2010; Talizina, 2009; Galperin, 2009).

A partir de los resultados anteriores cobra relevancia el papel del método de enseñanza sobre el aprendizaje y desarrollo de los alumnos. Se trata de una forma objetiva de lograr la asimilación de los conocimientos por parte de los alumnos,

partiendo de la concepción de que los conceptos matemáticos deben ser formados y para que esto sea posible se requiere de una sistematización de características únicas de cada concepto, además de las acciones necesarias para su formación. La organización de los métodos también requiere del conocimiento del docente sobre la asignatura, de la concepción que tenga del proceso de enseñanza y aprendizaje. Como menciona Talizina (2009), si el docente piensa que niños nacen para ser matemáticos o artistas, entonces solo espera a que los conceptos aparezcan en algunos alumnos de manera espontánea. Por el contrario, si cree que las habilidades matemáticas se desarrollan y se aprenden, entonces el maestro dará los elementos que favorezcan y guíen hacia la adquisición de conceptos.

Las investigaciones desde la perspectiva constructivista han enfatizado en el estudio las habilidades que utilizan los niños en su contexto para formar conceptos matemáticos, a partir de esto proponer tareas en el aula para enseñar las matemáticas. Estas estrategias son muy específicas y no logran ser de utilidad para todos los niños.

Por otra parte, las investigaciones desde el enfoque sociocultural han mostrado elementos aislados de los métodos de enseñanza. Específicamente los autores Sueanne, Robinson y Barube (2013), Ngee-Kiong, Singh y Hwa (2009), y Steele (2001) han concluido que el uso de materiales, uso de representaciones gráficas, la comunicación entre maestro y alumnos, la interacción entre alumnos, conocimiento del área matemática y pedagógica del maestro son factores que favorecen al aprendizaje de las matemáticas. No obstante, la relación entre estos factores debe ser analizada y precisada como un método de enseñanza organizado en lugar de estudiarlos por separado sin aclarar su aportación.

Otra aportación de las investigaciones anteriores (Steele, 2001; Ngee-Kiong, Singh & Hwa, 2009; Sueanne, et al., 2013), que retomaremos en nuestro estudio en los apartados correspondientes, se refiere a métodos e instrumentos de investigación utilizados por los autores. Se puede observar que los principales métodos utilizados fueron cualitativos y sus instrumentos de recolección de la información fueron la videograbación de clases, observación de la clase, uso de entrevistas con profesores y entrevistas con alumnos. Esta información fue analizada de forma sistemática. Por ejemplo, en la investigación de Ngee-Kiong, Singh & Hwa (2009) se

utilizó la videograbación, observación y entrevista a maestros y alumnos con el objetivo de obtener información sobre la enseñanza de nuevos conceptos.

Por último, las investigaciones basadas en la teoría de la actividad han mostrado mediante métodos formativos que la enseñanza debe ser organizada y dirigida para lograr que los alumnos asimilen conceptos y puedan aplicarlos en diversas condiciones. Sin embargo, no se han realizado estudios en los que el investigador no intervenga en un proceso de enseñanza, tanto en alumnos como en maestros. Así como la propuesta de identificar los métodos desde diferentes perspectivas teóricas que logren la formación de conceptos matemáticos en la escuela primaria.

## **1.2 Planteamiento del problema**

Los resultados de la última evaluación nacional Planea-2015 (SEP, 2015) muestran que el 60.5% de alumnos de sexto de primaria se encuentran en un nivel 1, es decir tienen deficiencias en el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas, mientras que solo el 6.8% si logra dominar los contenidos matemáticos. Este panorama no ha sido diferente en otras evaluaciones de otros años, la prueba EXCALE (2009, en INEE, 2012) muestra que el 56% de los alumnos de sexto de primaria se encuentran en un nivel básico, este nivel consiste en resolver problemas de conversión de medidas de tiempo o dos operaciones aritméticas, reconocer semejanzas y diferencias de figuras a escala, ubicar puntos en un croquis, resolver problemas que impliquen calcular el valor faltante en tablas, mientras solo el 8% logró el nivel avanzado.

Se han realizado evaluaciones nacionales en México a los alumnos de tercer grado de primaria. La última aplicación de ENLACE fue en el año 2013 y (SEP, 2013) mostró que solo el 51.2% de los alumnos presenta un nivel elemental e insuficiente de conocimientos de matemáticas, enfatizando en la importancia de desarrollar o fortalecer las operaciones aritméticas y solución de problemas.

En relación con las evaluaciones internacionales, los resultados del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE, 2015) muestran que el 50% de los alumnos de tercer grado respondieron correctamente en reactivos del tema numérico, mientras que el 60% en el dominio geométrico, 45% en dominio medida, 63% en estadística y dominio variación con un 69%. También, se muestra que los

alumnos de tercer grado tienen un bajo desempeño para la solución de problemas simples y complejos, obteniendo un 47% y un 45% correspondientemente de respuestas correctas.

Con respecto a la evaluación nacional del logro educativo de Matemáticas que obtienen los alumnos, que terminan los niveles de primaria, realizado por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) (2005, en Backhoff et al., 2007) se muestra que existe una “cantidad considerable de estudiantes de sexto grado de primaria que no logran adquirir las habilidades y los conocimientos en Matemáticas, las cuales se consideran indispensables para poder aprender los contenidos curriculares subsecuentes”.

En el estudio del INEE (2005, en Backhoff, Bouzas, Contreras, Hernández y García, 2007) se evidenciaron los factores de mayor impacto en el logro educativo, de español y matemáticas en alumnos de sexto grado de primaria, los cuales son: características individuales y familiares de los estudiantes (repetición de año, tener una actividad laboral), la modalidad educativa y los factores de composición de la escuela (violencia dentro de la escuela, estudiar en una escuela indígena), y variables estructurales de la escuela (inasistencias del docente, equipamiento escolar). Sin embargo, aunque las prácticas pedagógicas fue una variable sin efecto en logro educativo, los autores consideran que la literatura no es consistente en señalar cuáles son las prácticas pedagógicas que deben emplear los docentes, debido a que su efectividad depende de ciertas condiciones, estilos de enseñanza y a las características de los alumnos.

No obstante, en las prácticas pedagógicas (direccionalidad del proceso de enseñanza y aprendizaje) se sugiere que el docente tenga conocimientos específicos de cada temática abordada y de las acciones intelectuales, así como una visión teórica de su proceso de enseñanza (Miranda, 2005).

Otras investigaciones muestran que las habilidades del maestro son factores determinantes en el aprendizaje de las matemáticas. En el estudio de Cruz, Chacón, Yáñez y García (2014) se determinó que los estudiantes de primaria que alcanzan un promedio alto son aquellos cuyos docentes muestran mejores habilidades de planeación en el aula y dedican más tiempo a preparar sus clases.

Además, en relación con la didáctica, Parada y Pluinage (2014) enfatizan que el profesor que domina los contenidos pedagógicos y didácticos de la materia puede encontrar formas más útiles de representar los contenidos mediante analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones que permitan hacerla más comprensible a los estudiantes.

Desde otras perspectivas también se enfatiza la identificación de estrategias, métodos o técnicas que permiten desarrollar en los alumnos el aprendizaje de las matemáticas y a partir de esto los maestros puedan implementarlas en el aula (Iflazoglu y Pinar, 2012).

De esta forma, los investigadores educativos y los maestros continúan buscando elementos para garantizar o favorecer el aprendizaje de los alumnos, específicamente en las matemáticas porque es una asignatura que regularmente se evalúa a partir de la solución correcta de cálculos. Además, los reportes de las evaluaciones nacionales e internacionales muestran resultados desfavorables, ubicando a la mayoría de los alumnos tercer grado en un nivel básico (solución de operaciones de suma-resta, y de problemas que contienen datos directos e implican una operación matemática; suma-resta).

A pesar de que se ha modificado el plan de estudios de la SEP (2011) y han identificado estrategias y materiales novedosos para la enseñanza de las matemáticas, los alumnos siguen teniendo dificultades para comprender las tareas matemáticas.

### **1.3 Preguntas de investigación**

La pregunta que dirigió nuestra investigación fue ¿Cómo es el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en tres colegios con modelos diferentes (Montessori, Competencias, de la Actividad)? Dicho proceso fue analizado desde el método de enseñanza, el cual organizamos desde la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza. A partir de los elementos de análisis desplegamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los contenidos matemáticos, objetivos, tipo de tareas, acciones, orientaciones y formas de colaboración que plantean los docentes de estas escuelas para la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Los docentes utilizan material concreto para la enseñanza de las tareas? ¿con qué objetivo y cómo lo utilizan?
- ¿Qué conceptos o habilidades matemáticas desarrollan los alumnos en relación con la enseñanza de sus maestras?

Consideramos que las preguntas anteriores nos permiten conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a partir del contenido y la estructura de este proceso. Nuestra investigación no plantea ningún tipo de comparación cuantitativa de los tres métodos, sino un análisis del tipo de conceptos que surge a partir de estos. La identificación de semejanzas y diferencias en el proceso de la enseñanza puede aportar información para conocer qué condiciones favorecen u obstaculizan el aprendizaje de las matemáticas. Aunque no es nuestro objetivo principal la comparación de los métodos, sería un análisis incompleto sin plantear una lectura horizontal reflexiva de los datos.

Debido a estas consideraciones, hemos planteado las siguientes preguntas adicionales en nuestra investigación:

¿Cuáles son las similitudes y diferencias que existen en la forma de enseñar matemáticas en esas escuelas? ¿Cuáles son los elementos que favorecen u obstaculizan el aprendizaje de las matemáticas?

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general**

Analizar los métodos de enseñanza de matemáticas desde la teoría de la actividad, que son utilizados por los maestros de escuelas primarias privadas basadas en el modelo de Montessori, de competencias y de la teoría de la actividad en relación con la formación de conceptos matemáticos en los alumnos, para identificar los

elementos que favorecen u obstaculizan el desarrollo de los conceptos matemáticos en los alumnos.

#### 1.4.2 Objetivos específicos

-Identificar los elementos (acciones, orientación, organización, contenido, formas de colaboración) de los métodos de enseñanza de las matemáticas de cada escuela primaria (perspectiva Montessori, competencias y de la actividad).

-Establecer la relación entre los métodos identificados y el dominio de los conceptos matemáticos adquiridos por los alumnos en el proceso de la enseñanza-aprendizaje.

-Determinar qué tipo de orientación, organización, contenido y formas de colaboración aportan a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y cuáles obstaculizan su aprendizaje, específicamente la formación de conceptos matemáticos.

#### 1.5 Supuestos

- Los métodos de enseñanza que tomen en cuenta la sistematización de la materia, orientación completa-generalizable-independiente y acciones en diversos planos favorecen la adquisición de los conceptos numéricos y posibilidades para solucionar problemas en los alumnos.

-Los maestros que tengan conocimiento acerca de la estructura y el contenido de conceptos numéricos y el proceso de solución de problemas logran formar estos en sus alumnos de manera más exitosa.

-Los resultados de los métodos de enseñanza pueden mostrar los conocimientos de los alumnos, así como las actitudes que ellos tienen respecto al proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

## 2. Justificación

La educación matemática debe ser considerada como un proceso dinámico que va dirigido hacia la organización y formación de las acciones que garantizan los conceptos matemáticos (Talizina, 2001).

Ainscow (citado en Larrain, 2016) enfatiza que las respuestas pedagógicas tradicionales, las cuales han sido consideradas para individualizar la enseñanza y responder a las necesidades particulares de los alumnos, no han sido exitosas debido a que centran su atención en el alumno en lugar de estudiar el currículum, identificar aspectos de las estrategias o métodos de enseñanza que resultan eficaces o poco eficaces. Uno de los principales obstáculos que identifican autores involucrados en el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) son los currículos inflexibles y diseñados para enseñar a alumnos promedio que en realidad no existe, por lo que afectan a la mayoría de los estudiantes que tienen capacidades y motivaciones diferentes que no corresponden ni al currículum ni al promedio de alumnos ni a la inclusión educativa. La propuesta del DUA se dirige hacia la planificación de procesos pedagógicos flexibles, que atiendan las necesidades de grupo que esencialmente son diversos, además de diseñar ambientes de aprendizaje maleables, que sean capaces de ofrecer alternativas y opciones que cada alumno pueda elegir. Para esto es necesario desarrollar estrategias que se fundamenten en el conocimiento y la comprensión de conceptualizaciones construidas por los alumnos y la calidad de los andamiajes que requieren.

Una de las tareas importantes del docente es la toma de decisión acerca de la adecuación del uso de un método para el aprendizaje de las matemáticas. El uso del método es un tema que cobra relevancia en diversos contextos, los padres suelen preguntar cuál método utiliza el docente para formar conocimiento e incluso cuál método pueden ellos utilizar para superar las dificultades, así mismo los docentes en reuniones académicas discuten sobre qué método debe adoptarse como oficial en el centro educativo y cuáles pueden ser los métodos complementarios. Sin embargo, un método puede ser entendido de diferentes formas, por ejemplo, como el tipo de explicación que usa el maestro o solo técnicas. De acuerdo con Skantkin (1985,

citado en Zilberstein y Olmedo, 2016), es necesario posicionarse en una teoría para dar sentido a esta categoría y que cumpla su objetivo de orientar al maestro.

Para Skantkin (1985, citado en Zilberstein y Olmedo, 2016) un método de enseñanza consiste en definir los niveles de actividad cognoscitiva que realizan los alumnos y las actividades que organiza el maestro, considerando tanto elementos procedimentales como contenidos académicos. Los autores opinan que en todo momento la enseñanza y el aprendizaje son dos procesos dialécticos.

De acuerdo con Ruiz (2001), el maestro, específicamente en matemáticas, debe considerar los elementos esenciales de la disciplina y construir pedagógicamente la abstracción; la educación matemática debe fortalecer las diferentes formas de abstracción y operación mental que constituye esta ciencia. Por lo anterior, para desarrollar la capacidad de abstracción en los alumnos es necesario generar las condiciones que conllevan al pensamiento abstracto, independiente, crítico y capaz de ascender al conocimiento generalizado. Este autor señala que los maestros deben tener cuidado, cuando en los programas de estudio se exige una contextualización, debido a que ésta disminuye la acción abstracta porque en ella se establece datos directos de un entorno.

El aprendizaje de las matemáticas requiere de saber aplicar un conjunto de reglas, principios y procedimientos, su evaluación se da a partir de ejecuciones que en la recitación o repetición de definiciones. Diversos autores coinciden en la prevalencia de la enseñanza de algoritmos y en la repetición de reglas rutinarias sin una base conceptual (Gómez, 1997; Ávila, 2006, 2011). Algunas de las dificultades que se observan en los niños son las siguientes: en la disposición espacial, en el manejo de la cifra cero, en el trabajo con más de una cifra (Coronado, 2008), en la percepción y representación de las correspondencias uno a uno y uno a varios, en la síntesis de los elementos, en la orientación del acto, en la actitud hacia el problema, en la ejecución, en la conservación de la totalidad de los elementos y en la formulación en el plano del lenguaje de los datos del problema que se requieren para realizar la operación (Riverón, Martín, González y Gómez, 2001).

Organizaciones como NCTM han enfatizado el desarrollo de un enfoque para la comprensión conceptual de los estudiantes para lograr el aprendizaje de las matemáticas. Una de las metas es lograr que los estudiantes no solo sean capaces

de aplicar procedimientos correctos sino de comprender y explicar por qué los procedimientos funcionan (comprensión conceptual). Para lograr esta meta los maestros deben considerar los conceptos que han desarrollado los alumnos y construir sobre estos, es decir, trabajar desde lo que saben, así como deben considerar los conceptos que se forman dentro del aula. Por último, es necesario que el maestro conozca las relaciones entre el contenido común y contenido matemático especializado, entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento de la asignatura, así como su relación con el currículo. La didáctica, el conocimiento del niño y el conocimiento de la asignatura son aspectos que todo maestro debe comprender para la elaboración de sus programa o métodos de enseñanza (Thanheiser, Browning, Moss, Watanabe y Garza, 2010).

De acuerdo con Solovieva, Ortiz y Quintanar (2010) uno de los problemas más comunes de los alumnos, que se encuentran en el ámbito escolar, es el manejo de habilidades matemáticas de acuerdo con los planteamientos de los programas de enseñanza de las instituciones. Algunas investigaciones muestran que los maestros que enseñan las matemáticas en México aún no logran la coherencia teórica metodológica, a pesar de existir un nuevo plan de estudios que promueve la reflexión y crítica los maestros continúan utilizando prácticas de transmisión de información y control sobre lo que sucede en el aula (conducta), limitando el aprendizaje práctico de los alumnos (Arévalo, 2015). Se reporta que los tiempos para realizar actividades fueron limitados, obstaculizando que los alumnos terminaran dichas actividades y los ejercicios de los libros de textos fueron en su mayoría de los casos resueltos por los profesores. Los resultados de entrevistas con los maestros mostraron un mayor énfasis en enseñar a solucionar problemas a sus alumnos y en el manejo de algoritmos, así como la desmotivación de los alumnos que genera distracción o apatía.

Por otro lado, nuestra investigación pretende aportar a nivel teórico la posibilidad de generar y organizar los elementos que puedan ser incluidos en el contenido de análisis de métodos de enseñanza de forma general en lugar de hablar de la aplicación de diversas estrategias por parte de los pedagogos o apegarse a un “método” propuesto por algún autor o institución. Como elementos del contenido de método de enseñanza proponemos considerar: a) el sistema de conceptos en los

que se basa el maestro y la jerarquía de su introducción, b) los tipos de acciones concretas de enseñanza-aprendizaje, c) el sistema de orientación que utiliza el maestro en el trabajo con los alumnos y, d) los tipos de interacción que se proponen.

La necesidad y la posibilidad de valoración de contenidos de métodos de enseñanza se señala de forma directa e indirecta por diversos investigadores, citados previamente y a largo de la exposición teórica de la teoría de la actividad (Skantkin, 1985, citado en Zilberstein y Olmedo, 2016; Davidov, 1988; Talizina, 2009; Galperin, 2009; Solovieva, 2016; Solovieva, Rosas y Quintanar, 2016).

Cabe señalar que el maestro mismo puede tener diversos grados de conciencia y de reflexión acerca del uso de sistemas y jerarquía de conceptos, tipos de acciones, orientación y formas de interacción. Dicha situación explica la necesidad de uso de métodos diversos para la valoración de contenido de la enseñanza, por lo cual la entrevista con el maestro nunca sería un método único y suficiente. Al mismo tiempo, ayudaría obtener la información acerca del nivel de conciencia y reflexión que tiene el maestro acerca de proceso de enseñanza-aprendizaje. Se puede suponer que un uso consciente de sistemas de conceptos jerárquicos, acciones, orientación y la elección de formas de interacción por parte de maestro favorece la vía de enseñanza argumentada y estructurada, en lugar de la elección azarosa, no justificada y poco reflexiva y comprendida por el mismo maestro de “estrategias” y “dinámicas”.

El primer tipo de enseñanza se puede llamar como enseñanza estructurada y orientada, mientras que el segundo como enseñanza “empírica”. Podemos suponer que pueden existir grados intermedios entre estos dos polos, sin embargo hace falta realizar estudios específicos para analizar estos grados. Nuestro trabajo pretende indagar acerca de la situación existente en México al respecto de la enseñanza de las matemáticas. Estamos conscientes que sería poco probable estudiar todas las situaciones existentes en la realidad, sin embargo nos parece apropiado intentar caracterizar los contenidos de los métodos de enseñanza.

El papel de la orientación en la enseñanza será observado bajo la perspectiva de los colegios y el trabajo concreto de cada maestro. Existen investigaciones previas (Galperin, 2009; Salmina, 2017, Nikola y Talizina, 2017, Valadarskaya, 2017, Butkin, 2017) que han establecido la relación entre la orientación completa, generalizada e

independiente y la asimilación de conceptos por parte de los alumnos de la escuela primaria y secundaria (matemáticos, gramaticales, de historia), pero no en escuelas específicas que tienen un método de las matemáticas. Dichas investigaciones señalan que, en todas las ocasiones estudiadas, los maestros que organizan y utilizan de forma consciente los sistemas de orientación logran con mayor eficacia que sus alumnos formen conceptos, solucionen problemas creativos, comprendan los contenidos de las materias, incluso logren el éxito escolar y mantengan el interés por el aprendizaje.

Existen evidencias respecto a dichos métodos de enseñanza de solución de problemas en matemáticas (Nikola y Talizina, 2017; Solovieva, Rosas y Quintanar, 2016); introducción a la enseñanza inicial en el proceso lectoescritor en la lengua española en México (Solovieva y Quintanar, 2014); solución de las construcciones geométricas (Butkin, 2001); demostración de teoremas en geometría (Volodarskaya, 2001); trabajo con los conceptos matemáticos iniciales con alumnos de primer grado de primaria (Solovieva, Ortiz y Quintanar, 2010); actividades introductorias previas a la introducción de conceptos numéricos con niños del tercer grado de educación preescolar (Zárraga, Quintanar, García y Solovieva, 2012). Diversos estudios relacionados con la enseñanza de gramática, lectura y la escritura se citan en el trabajo que propone método innovador de la introducción de lenguaje escrito en la escuela primaria (Solovieva, 2016).

En el caso de particular México, las investigaciones basadas en la teoría de la actividad que proponen analizar los contenidos de métodos de enseñanza, son escasos. A nivel práctico tales trabajos permitirán a los maestros identificar y organizar su proceso de enseñanza, así como modificar si es necesario, además, de conocer las aportaciones de la Psicología en el aula. En relación con los alumnos se les ayudará a asimilar el concepto de número y de habilidades generales para la solución de problemas.

En la tabla (2) se resumen los elementos del método de enseñanza de las matemáticas desde el paradigma histórico-cultural, los cuales serán detallados en el capítulo de marco teórico.

Tabla 2. Elementos de métodos de enseñanza

Elementos	Contenido
Sistema y jerarquía de conceptos	Niveles de conceptos, ausencia de conocimientos conceptuales
Tipos y planos de acciones	Acciones materiales-materializadas, acciones perceptivas concretas, perceptivas simbólicas, verbales orales, escritas, combinaciones de estas, etc.
Tipos de orientación	Completa - incompleta, generalizada - particular, independiente – dependiente
Formas de interacción	Maestro-alumno, alumno-alumno, alumno-objeto, alumno individual, etc. Comunicación autoritaria, sobreprotectora, amistosa, etc.

El sistema y jerarquía de conceptos se refiere al planteamiento específico de enseñanza que puede partir de conceptos únicos particulares, generales; presentarlos como unidades aisladas, no referirse a los conceptos previamente estudiados, por el contrario usarlos como referencia; establecer relaciones jerárquicas entre los conceptos o no establecer dichas referencias, etc.

Los tipos y planos de acciones utilizadas por el maestro se refieren al uso de tareas predominantemente a la copia, escritura independiente, solución de problemas o ejemplos en el plano externo, con base a los esquemas conceptuales, uso de objetos y/o símbolos, realización de mapas o esquemas, planes de las acciones, etc. Finalmente, se puede hablar de tareas abiertas creativas, tales como elaboración de problemas por parte de los alumnos en las matemáticas a partir de las situaciones señaladas previamente.

Los tipos de orientación fueron establecidos dentro de la concepción de Galperin (1969, 2009, 2001). Este autor plantea la existencia de uso de orientación completa o incompleta, generalizada o concreta; dependiente o independiente durante el proceso de la enseñanza-aprendizaje. En diversos estudios experimentales y teórico-metodológicos se han propuesto orientaciones completas, generalizadas que obtenían sentido independiente para los alumnos en diversas áreas de conocimiento

(Galperin, 1985 en Talizina, 2009; Solovieva, 2014). De acuerdo con los datos de estos estudios y la opinión de los autores, seguidores de dicho enfoque, el tipo de orientación más óptimo para la enseñanza es la orientación completa, generalizada e independiente. Sin embargo, en la vida práctica de las situaciones escolares hace falta valorar los tipos de orientación que pueden tener lugar en la vida real.

Las formas de interacción se refieren a tipos de comunicación, trabajo que predomina en sesiones y si este implica trabajo individual, trabajo en grupos, en parejas, con uso de objetos, así como formas de comunicación: autoritaria, amistosa, sobreprotectora, etc.

Consideramos que identificar la forma de enseñanza de las matemáticas mediante el análisis de nuestro objeto de estudio permite, en un primer momento, proponer una organización teórica-metodológica de las matemáticas, es decir, conocer qué conceptos o habilidades están siendo desarrolladas en las aulas, a partir de qué acciones y cuál es su proceso de formación, así como remarcar las que son necesarias para un aprendizaje de las matemáticas.

En un segundo momento, con la identificación de la forma de la enseñanza se puede reflexionar con las maestras participantes sobre cómo enseñan matemáticas y qué resultados obtienen para re-organizar las actividades y no solo cambiar de estrategias o técnicas. Esta reflexión permite que ellas conozcan otros métodos de enseñanza y les permitiría tener mayores opciones para organizar su forma de enseñar (identificar qué elementos favorecen u obstaculizan el desarrollo de conceptos matemáticos).

En un tercer momento, la identificación del método de enseñanza puede aportar al trabajo de investigación con maestros y alumnos como participantes de la actividad de estudio, no verlos como aislados o remarcar mayor participación de cada uno. La inclusión de ambos participantes en las investigaciones conlleva a considerar un proceso dialéctico de enseñanza-aprendizaje, no solo establecerlo o inferirlo teóricamente sino también en la práctica y que mejor que en una clase específica.

### 3. Marco teórico

La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza es nuestro marco de referencia, debido a que justo esta teoría permite identificar y plantear el contenido de nuestro objeto de estudio: método de enseñanza. Con lo anterior queremos intentar identificar, desde un enfoque teórico elegido, cómo es que los maestros enseñan las matemáticas a los alumnos en la escuela primaria. Lo opuesto a un enfoque teórico, sería simplemente nombrar y describir las estrategias y describir las didácticas sin ningún tipo de análisis de contenido de las acciones, nivel de acciones, jerarquización de conceptos y formas de interacción en las clases. Los elementos nombrados como nivel de acciones, tipos de conceptos y formas de interacción se han identificado desde la teoría de la actividad.

Nosotros consideramos que este paradigma brinda los conceptos para desarrollar nuestros instrumentos de investigación, debido a que nos muestra el proceso de formación de conceptos matemáticos y la estructura psicológica de la solución de problemas (Salmina, 2017; Nikola y Talizina, 2017; Tsvetkova, 1999; Rosas, Solovieva y Quintanar, 2017). Así mismo, la forma de evaluación que planteamos y requerimos es la propuesta por Vygotsky (2006), quien consideró la evaluación interventiva (dinámica), que consiste en tener una interacción con los niños, brindar apoyos para identificar su zona de desarrollo próximo, es decir, lo que logran con ayuda del adulto. Por último, este paradigma nos brinda la posibilidad de elegir un método cualitativo para analizar nuestros datos.

La teoría de la actividad, desde nuestro punto de vista, está estrechamente vinculada con el paradigma histórico-cultural del desarrollo humano, por lo cual resulta importante plantear las posiciones de este paradigma que son esenciales para nuestro estudio.

Primero, presentamos las posiciones generales del paradigma histórico-cultural, describiendo las aportaciones de Vygotsky, principalmente la importancia de la enseñanza en el desarrollo psicológico del niño, revisando tres posturas que relacionan el desarrollo y el aprendizaje. También presentaremos cómo este autor estudió la aritmética del niño preescolar y escolar.

### 3.1 Paradigma histórico-cultural

Aunque la teoría de Vygotsky ha sido considerada por autores como parte del paradigma Sociocultural (Hernández, 2006), los continuadores de Vygotsky, incluyendo el mismo autor, han establecido la diferencia entre el término sociocultural e histórico-cultural. Leontiev (2003) refiere que lo social hace referencia a los aspectos económicos, políticos y demográficos, entre otros aspectos de la vida que pueden ser identificados en la vida de una sociedad humana. El término histórico cultural es mucho más preciso en su sentido psicológico, debido a que permite considerar la premisa paradigmática de que el hombre es producto de la cultura, la cual ha tenido un desarrollo histórico (Solovieva, 2016, 2015, 2014).

Autores como Talizina, Solovieva y Quintanar (2010) continúan ampliando el aparato teórico-metodológico de Vygotsky y parten de la teoría de la actividad para colaborar en el ámbito educativo. Por lo anterior, solo considerar a Vygotsky limita la visión del enfoque histórico-cultural, debido a que sus seguidores (Leontiev, 2003; Galperin, 2009; Obujova, 1977,) han investigado y aportado sobre las herramientas específicas (orientación) que favorecen al desarrollo y los niveles de adquisición de los conocimientos y acciones (teoría de la formación de las acciones mentales por etapas).

Nuestra investigación retoma como fundamentos teórico-metodológicos: la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza (Talizina, 2009) y la concepción de la formación de las acciones mentales dentro de la misma teoría (Galperin, 2009, 2001, 1969). La primera establece los principios del desarrollo psicológico del alumno, la relación entre el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como la forma de sistematización de las asignaturas escolares, en nuestro caso las matemáticas. La segunda concepción nos permite conocer las formas de orientación y las etapas de asimilación de los conceptos y habilidades conceptuales (matemáticas).

De acuerdo con Talizina, Solovieva y Quintanar (2010), el enfoque histórico-cultural es relacionado con el nombre de su fundador L. S. Vygotsky, a quién se le denominó el “Mozart de la Psicología”, debido a que fue quién estableció que el desarrollo humano se somete a las leyes culturales y no a leyes biológicas.

Así mismo, Vygotsky (1984) estudió la relación que existe entre el aprendizaje y desarrollo, específicamente afirmó que “el aprendizaje escolar aporta algo completamente nuevo al desarrollo del niño” (p.111). Para comprender este postulado, es necesario recorrer el análisis que realizó este autor, quien primero identifica las nociones de aprendizaje y desarrollo de tres posturas para sintetizar que estos procesos tienen una relación y formular la pregunta ¿qué tipo de relación?, así como el papel de la enseñanza.

Primeramente, partimos de la revisión de las teorías sobre aprendizaje que Vygotsky (1984) agrupó en tres visiones. El primer grupo constituyen las teorías que consideran el aprendizaje y desarrollo como unidades independientes, de tal forma que el aprendizaje no ayuda ni modifica en absoluto al desarrollo. Así mismo se considera al desarrollo como resultado de la maduración para posteriormente dar a paso a la adquisición de conocimientos y hábitos. Vygotsky (1984; 2006) sintetizó estos postulados como “el aprendizaje sigue siempre al desarrollo” p. 106. Esta idea fue base de la teoría de Piaget, quién se interesó por investigar el pensamiento puro de los niños, es decir, sin influencia del aprendizaje o del entorno. Una tarea que este autor utilizaba era hacer preguntas inaccesibles para los niños, por ejemplo, a niños de cinco años de edad preguntaba ¿por qué no se cae el sol?, para lo cual la mente de los niños se veía obligada a trabajar de forma independiente al aprendizaje y experiencia.

El segundo grupo trata de considerar el aprendizaje como desarrollo, es decir, en igualdad, de forma en que cada etapa de aprendizaje corresponde a cada etapa de desarrollo. Autores como James (en Vygotsky, 1984) han aportado a esta premisa, quien considera el desarrollo como la acumulación de reacciones innatas y señala que la enseñanza debe respetar esos procesos biológicos, no puede cambiar la dinámica natural del desarrollo.

El tercer grupo de autores considera que el desarrollo y aprendizaje son procesos interdependientes. Por un lado, el desarrollo depende de las leyes biológicas del sistema nervioso y, por otra parte, el aprendizaje representa también a un proceso de desarrollo por sí mismo. Así el proceso de maduración prepara y posibilita un determinado aprendizaje, mientras que este último estimula el desarrollo y lo lleva a otro nivel. Alguno de los representantes de esta concepción es Koffka (citado en

Vygotsky, 1984), quién además establece que el desarrollo es una esfera más amplia que el aprendizaje y que el aprendizaje es la adquisición de hábitos y capacidades específicas. Este autor también tuvo como objetivo aclarar las leyes del aprendizaje infantil como aportación de quienes enseñan, por lo que se dedicó a estudiar la edad preescolar para conocer los niveles más simples de este proceso. Dicho autor concluyó que la diferencia entre la etapa preescolar y la escolar es que el aprendizaje es más sistematizado por el niño en esta última.

Después de describir las visiones sobre desarrollo y aprendizaje que Vygotsky analizó, es posible comprender su teoría, la cual denominó como “teoría del área del desarrollo potencial” (Vygotsky, 1984, p. 111). Este autor establece la premisa de que existe una relación entre un determinado nivel de desarrollo y capacidad de aprendizaje potencial, a diferencia de lo que establecía el primer grupo de teorías que revisó. Sin embargo, para conocer dicha relación es necesario establecer dos niveles de desarrollo, el primero fue denominado como “desarrollo efectivo del niño”, que se caracteriza por las funciones psicológicas que el niño ha conseguido como resultado de un específico desarrollo. Así, cuando el adulto presenta a un niño una tarea (que en promedio responden los niños de la misma edad) y solo observa o registra lo que el niño puede lograr de forma independiente, en realidad el adulto solo está identificando el desarrollo efectivo de este niño, más no el desarrollo potencial del niño. Sin embargo, basta con que el adulto brinde ayudas (demostraciones, preguntas guía, ejemplos) para que ese mismo niño pueda resolver esa y demás tareas con mayor complejidad. Con ello, el adulto estaría identificando el segundo nivel del desarrollo, el nivel de desarrollo potencial. Este nivel permite conocer los procesos psicológicos que están ocurriendo en el niño, así como el futuro y la dinámica de su desarrollo.

De esta forma, el aprendizaje y desarrollo no coinciden, el proceso del desarrollo sigue al aprendizaje, el cual crea el nivel de desarrollo potencial. Específicamente, Vygotsky (1984) escribió “lo que el niño hace hoy con ayuda del adulto lo podrá hacer mañana por sí mismo” p. 113. Esto permite considerar el papel que tiene el adulto en el desarrollo del niño. Así mismo, lo expresado por Vygotsky conlleva a reflexionar sobre la participación y papel esencial de la enseñanza, la cual aún es común que considere el nivel de desarrollo actual de los niños y, por ende, no

favorece al desarrollo. Para este autor la enseñanza debe adelantarse al desarrollo, además de que cada materia escolar se relaciona con un aspecto del desarrollo que cambia en diferentes edades psicológicas (preescolar-escolar). Vygotsky (citado en Solovieva y Quintanar, 2010) concluye que en la infancia es la enseñanza que conduce al desarrollo, y no viceversa.

Dicha postura sigue siendo novedosa y poco común hasta el día de hoy, debido a que plantea relaciones dialécticas entre el proceso de la enseñanza y el desarrollo del niño. No toda la enseñanza es óptima para Vygotsky y sus seguidores, sino solo aquella que garantiza las interacciones en la zona del desarrollo próximo (Vygotsky, 2006).

Dicha posición fue ampliamente retomada y desarrollada por los seguidores de Vygotsky, quienes se dedicaron a estudiar, cuáles son las condiciones que permiten favorecer la enseñanza que interactúa con la zona del desarrollo próximo del niño. Se concluye con mayor determinación que no toda enseñanza conduce al desarrollo (Talizina, 2000).

Lo anterior nos lleva a la necesidad de considerar las edades psicológicas en la infancia, así como las formas de la enseñanza que existen y que se utilizan. Particularmente, esto puede ser analizado desde los aspectos psicológicos y pedagógicos que caracterizan la enseñanza en la etapa preescolar y la escolar.

Específicamente en el aprendizaje de la aritmética Vygotsky señala (1995) que en la transición de la aritmética primitiva a la cultural el principio fundamental de la Psicología de las operaciones de conjunto es la *ordenación*, entendida ésta como la adjudicación a la cantidad de una estructura que permite incluir a un determinado conjunto. Este autor refiere como ejemplo la facilidad que se tiene para percibir la ausencia de un soldado en la compañía (formación) que darse cuenta de la ausencia de un hombre en una aglomeración desorganizada. Al inicio, los niños operan de este modo, toman objetos de forma desorganizada y los colocan en una fila, lo cual les posibilita darse cuenta de que puede faltar uno de los objetos que ellos utilizan.

La comprensión de la utilidad de la ordenación se manifiesta en la comprobación de los resultados del reparto. Una vez que con ciertos objetos se construye un mismo modelo por diversos niños, ellos verifican si los objetos han sido suficientes para

lograrlo, es decir, comprueban los resultados de la división de acuerdo con la formación completa o no del modelo dado (Vygotsky, 1995).

La comparación de las figuras formadas no es un fin en sí mismo sino un juego aritmético, un medio y una demostración. El exigir que se forme algo que pueda ser *comparado* constituye una unidad de cálculo. Cuando uno de todos los niños forma algo diferente al modelo establecido los demás niños protestan porque se dan cuenta que pierden la posibilidad de comparar, es decir, que falta el denominador común.

No obstante, al variar las características de los objetos, para lo cual Vygotsky (1995) utiliza lápices de diversos tamaños y colores, ya no se trata de cubitos del mismo tamaño con los que podían construir objetos como tractores. Los niños, al darse cuenta de que todos los lápices son distintos, empiezan a extender los parámetros para distribuir a los lápices o para formar los grupos. Después, procuran nivelarlos (largo-corto), posteriormente reúnen en manojos, finalmente, reparten a cada niño un manajo. Así, menciona Vygotsky, un niño tendrá cinco lápices más cortos y otros dos más largos. El autor señala que tales situaciones, desde el punto de vista de una división aritmética, son incorrectas o no tienen algún sentido, pero desde el punto de vista de la forma (parámetros de distribución) que es empleado por los niños, es correcto (tiene un sentido para ellos).

Continuando con las operaciones de los niños, Vygotsky (1995) explica que para los adultos no es posible que el resto sea mayor que el divisor, pero para el niño esto es posible:

El niño hace la división con ayuda de tractores y lo efectúa del siguiente modo: separan de inmediato varios tractores. Para cada tractor necesita seis fichas, pero son cuatro niños lo que participan en el juego. Imagínense que al final quedan cinco fichas sin repartir. ¿Pueden dividirse entre cuatro niños? Es posible, pero con cinco fichas es imposible construir el tractor; vemos, por lo tanto, que las cinco fichas constituyen un número superior al divisor y es el que queda en el resto. Es una magnitud que con esa forma de división resulta imposible dividir. Se demuestra así experimentalmente que esta división es ya una operación mediada... el niño no actúa en ese caso a ojo, sino que elige una cierta figura -el tractor- que le sirve de medida como unidad p. 145.

A partir de los ejemplos anteriores se puede inferir que la percepción (global) de los objetos es necesaria para el desarrollo de la aritmética del niño, la cual se convierte en un medio auxiliar para la operación de división. Este paso es el más importante para los niños. Específicamente, Vygotsky (1995) refiere que la etapa fundamental en el desarrollo del cálculo estriba en el paso de la percepción directa de la cantidad a la mediada, es decir, que el niño equipare las cantidades con determinados signos y opere con ellos.

Al final de este proceso de transición de la aritmética, el niño tropieza con que la división por medio de modelos distrae su atención, tiempo y esfuerzo ante la tarea inmediata que se le plantea. Ejemplo de ello es la dificultad que surge a partir que el resto resulta superior al divisor. Es entonces cuando el niño recurre a otro tipo de operaciones más sencillas, para lo cual ya no emplea formas tan concretas como tractores o relojes en sus modelos, sino ciertas formas espaciales abstractas que corresponden a la cantidad y pueden dividirse en unidades (Vygotsky, 1995).

Para el pedagogo y el psicólogo es importante saber que la asimilación por el niño de la aritmética cultural es siempre un proceso dialéctico que implica saltos cualitativos en los procesos de desarrollo, debido a que se da un constante conflicto entre la aritmética del niño y la aritmética que le enseñan los adultos, es decir, entre las dos distintas formas de operar con las cantidades.

Vygotsky (1995) plantea que no se puede pensar que la aritmética sigue una trayectoria relativamente recta, es decir, que la aritmética preescolar prepara a la escolar de manera plenamente natural, pensar de esta manera llevará al maestro a no orientar el desarrollo. A diferencia de ello, se debe pensar que hay un punto de viraje en el paso de una aritmética a la otra. El niño al empezar a dominar los signos, las cifras y las reglas de su designación sustituye las operaciones con objetos por operaciones con sistemas numéricos.

En resumen, Vygotsky (1995) ha planteado que existe una relación entre el cálculo y la percepción del niño y lo explica de la siguiente forma:

En la primera etapa de desarrollo la forma es un medio auxiliar para el cálculo y exponíamos este sencillo ejemplo: ¿dónde es más fácil darse cuenta de la falta de una persona: en una compañía o en medio de una muchedumbre? La forma, es decir, una cierta ordenación y regularidad de la propia impresión visual constituye un soporte importantísimo para

percibir correctamente la cantidad... Si tomamos el sencillo juego del dominó, veremos que el niño, sin saber el cálculo, puede jugarlo mediante la captación de las figuras 2 y 2. Es el todo evidente que una forma ordenada estimula enormemente el desarrollo de la aritmética natural. De aquí se deduce que para los diversos sistemas del cálculo pueden ser utilizados diversos objetos. Es el todo evidente que no siempre se puede contar con una misma cantidad p. 146

A partir de las reflexiones expuestas por Vygotsky, podemos comprender que la aritmética escolar constituye un momento de cambio, en el cual el niño debe ser consciente de que, aunque le sea más fácil operar con figuras numéricas, esto lo limita y debe liberarse de la percepción directa. En otras palabras, se trata de una ruptura entre el uso de matemáticas “espontáneas” en la institución preescolar (vida del niño) y la enseñanza escolar que se debe basar en principios matemáticas teóricos. La ruptura y no la continuación entre los conceptos empíricos y teóricos son señaladas por Vygotsky (2008), a diferencia de los planteamientos posteriores del enfoque constructivista que propone basar toda la enseñanza en la práctica empírica del niño, en sus acciones perceptivas y concretas, las cuales carecen de las características esenciales de los objetos y obstaculizan la generalización.

Desafortunadamente, en nuestro país la enseñanza de la aritmética en preescolar tiene como finalidad la enseñanza de los números a nivel perceptivo y, aunque incluyen objetos solo se utilizan para verlos, juntarlos o quitarlos, no hay acciones activas con estos mismos objetos (Zárraga, Quintanar y Solovieva, 2012). La aritmética en la primaria también se caracteriza por la continuación de las series numéricas aprendidas en el preescolar, e incluso se demanda el cálculo mental a partir de símbolos que no siempre tienen un significado y que han sido asimilados de forma asociativa (símbolo-número). Por lo que es común que los niños de primaria no desarrollen el concepto de número (Solovieva, Ortiz y Quintanar, 2010)

Podemos sintetizar en los siguientes puntos las premisas establecidas por Vygotsky, las cuales fueron consideradas por sus seguidores y serán retomadas en el siguiente apartado: 1) el proceso de desarrollo sigue al aprendizaje, 2) existen diversas relaciones entre los aprendizajes y el desarrollo, es decir, existen aprendizajes que utilizan el desarrollo ya alcanzado (andar en bicicleta, escribir a máquina) y contribuyen muy poco al desarrollo general, así como existen

aprendizajes que desarrollan nuevas y complejas relaciones entre los procesos psicológicos (como aprender a escribir, la aritmética, etc.) y marcan etapas fundamentales en la infancia, 3) la enseñanza que favorece al desarrollo es aquella que se adelanta a este, 4) existe una ruptura entre el aprendizaje en etapa preescolar y escolar.

### **3.2 Teoría de la actividad**

La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza a diferencia de la teoría de Vygotsky es menos conocida y comprendida como una interacción de conocimientos de áreas de la Psicología y Pedagogía (Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010).

Un concepto esencial en la teoría de Vygotsky que hemos descrito ampliamente en el apartado anterior es que la enseñanza favorece al desarrollo o que la enseñanza conduce al propio desarrollo, debido a que es posible organizarlo y dirigirlo hacia los procesos que aún no alcanzan su estado óptimo (maduración). Este postulado fue la base para las investigaciones y trabajos de los seguidores de Vygotsky, de acuerdo con Solovieva y Quintanar (2017), un concepto que se sistematizó fue “actividad de enseñanza-aprendizaje dirigido” (Davídov, 1996; Galperin, 2000 y Talizina, 2009). Los autores Solovieva y Quintanar (2017) refieren que Davídov (1996, citado en Solovieva y Quintanar, 2017) identificó diferencias entre el aprendizaje escolar dirigido y el aprendizaje como resultado de actividades inespecíficas, por lo que es necesario conocer que la actividad de aprendizaje escolar tiene su propia estructura y contenido. Así como, las neoformaciones que surgen en la edad escolar y que garantiza el desarrollo psicológico y neuropsicológico del niño. La característica fundamental de esta enseñanza es que esta debe favorecer la adquisición de sistemas jerárquicos conceptuales en el niño, lo cual implicaría un escalón cualitativo superior de su experiencia cultural (Solovieva, 2016). Los conceptos científicos o teóricos representan las formaciones nuevas esenciales de la edad de los estudios escolares (Davídov, 1988).

Para conocer esa estructura y las premisas generales de la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza a continuación se describirán los elementos generales de dicha teoría.

Aunque es considerado a A. Leontiev como creador de la teoría de la actividad, Davidov (1988) menciona que diversos autores contribuyeron con las bases para desarrollar esta teoría, B. Anániev, E. Iliénkov, A. Luria, S. Rubinstein, L. Vygotsky, A. Zaporozhets, Y. Galperin, D. Elkonin, entre otros.

Actualmente, Talizina (2009) en su propuesta de teoría de la actividad aplicada a la enseñanza, resume tres principios fundamentales de dicha teoría.

El primer principio fue formulado en los años treinta del siglo XX por Rubinstein (citado en Talizina, 2009), quién estableció que *la psique se encuentra en relación inseparable con la actividad* (Rubinstein, 1969). La actividad es el proceso de interacción del hombre con el mundo externo. En la base de la formación y la conservación de las formaciones psicológicas se encuentran las acciones y la actividad. La actividad puede ser entendida como un proceso sometido a un motivo que realiza un sujeto (Guippenreiter, 1996 citado en Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010).

De esta forma, enfatiza Talizina (2009; 2001), el hombre (sujeto) participa desde el inicio como activo y no como un ser pasivo. A partir de esto, se propone estudiar no los procesos aislados: atención, percepción, aprendizaje, memoria, etc. sino el sistema de actividad que realiza el hombre. La enseñanza, en este mismo sentido, no puede ser comprendida únicamente como una serie de métodos o tareas que influyen sobre el alumno, sino como un proceso conjunto, en el cual el alumno participa activamente desde el inicio mismo. Así, el alumno y el maestro se encuentran en la actividad de estudio, comparten la actividad (Valdés, 2018).

La actividad debe ser analizada desde la acción, la cual contiene los elementos específicos de la actividad. La acción posee la misma estructura que la actividad: el objetivo, el motivo, el objeto hacia el cual se dirige, el conjunto determinado de operaciones que realizan la acción y el modelo con el que el sujeto realiza la acción. La acción constituye el acto de la actividad del sujeto. Por último, la acción es subjetiva, le pertenece al sujeto y siempre participa como actividad de una personalidad concreta (Talizina, 2009).

El segundo principio establece *la naturaleza cultural del desarrollo psíquico* del hombre. Retomando a Vygotsky (1995), se establece que los procesos psicológicos

son de origen histórico cultural y no biológico, es decir se someten a leyes culturales y no a la maduración del sistema nervioso. Por lo que los procesos psicológicos superiores son específicos del hombre, producto del desarrollo histórico-cultural, son mediados por la cultura (signos) y con un carácter voluntario, que permite dominar nuestro comportamiento.

El desarrollo de los individuos se da a través de la vía de la asimilación de la experiencia externa, social, que existe en los medios de producción, en los libros, en el idioma, etc. El hombre no nace con los medios preparados del pensamiento ni con los conocimientos preparados del mundo, todo esto se asimila como experiencias de las generaciones anteriores. A diferencia de los animales, el hombre tiene que aprender prácticamente todo. El significado del maestro consiste en transmitir la experiencia social a la nueva generación, así la enseñanza y la educación son tipos de actividad del hombre organizados especialmente para lograr la asimilación de las experiencias de las generaciones anteriores (Talizina, 2009).

No obstante, es necesario considerar el papel que juegan los elementos biológicos en el desarrollo. Talizina (2001; 2009) enfatiza en que el cerebro humano es una condición que permita alcanzar el nivel del desarrollo humano con un conjunto de las características anatómicas y fisiológicas innatas. La fuente del desarrollo, sin embargo, es la forma de interacción a través de la enseñanza, crianza y educación, entre otras actividades culturales (Solovieva y Quintanar, 2016).

Es importante que el maestro identifique su visión sobre el desarrollo, por ejemplo, si el maestro es partidario de la idea que los matemáticos nacen, entonces su trabajo consistirá en identificar los niños con las capacidades matemáticas y en la formación de las condiciones para la auto-realización de los alumnos; por el contrario, si el maestro considera que la enseñanza es la fuente del desarrollo, entonces su tarea consistirá en garantizar la formación de las capacidad matemáticas durante el proceso de estudio de las disciplinas matemáticas (Talizina, 2009).

El tercer principio es *la estructura sistémica de la actividad*, la cual está conformada por diversos componentes que se encuentran en constante interrelación, los cuales son: motivo, objetivo, base orientadora de la acción, medios de ejecución y resultado. Los elementos funcionales, es decir, cómo transcurre la actividad son: dirección u orientación, ejecución, control y corrección. Cada actividad puede

dividirse en acciones, considerando a la acción como objeto de estudio de la Psicología y entendiéndola como un proceso que se refleja en la conciencia del sujeto y se dirige hacia un objetivo concreto. Éstas acciones al automatizarse se convierten en operaciones y pierden su carácter consciente. Las acciones pueden clasificarse en generales y específicas (Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010).

Se ha propuesto que la actividad humana no puede dividirse en funciones sino que se ha de considerar en su totalidad, es por ello que para su análisis y explicación no podemos limitarnos al abordaje de determinados eslabones psicológicos o factores neuropsicológicos. Por lo tanto, es necesario considerar acciones complejas que incluyen la interrelación dialéctica entre diversos elementos; afectivos, psicológicos y psicofisiológicos (Solovieva y Quintanar, 2010).

### **3.3 Teoría de la formación de las acciones mentales**

Para Vygotsky (2006), el proceso de interiorización es la forma en que la función psicológica superior pasa del plano social externo (plano de las relaciones de las personas) al plano individual interno de su realización, es decir, toda función aparece dos veces en el desarrollo, primero externa (compartida) y posteriormente interna (plano individual).

Esta línea de investigación fue retomada y desarrollada por Galperin, Elkonin, Zaporozhets (1963) y otros autores quienes han establecido pasos intermedios en el proceso de interiorización, es decir, la formación por etapas de las acciones y los conceptos (Galperin, 2009). Esta teoría nos permite conocer el sistema de acciones que conllevan a la formación de conceptos matemáticos. A continuación describimos esta teoría.

Galperin (1969; 2009) considera que la organización de la formación por etapas de las acciones mentales y conceptos permite estudiar el desarrollo intelectual e intervenir en el mismo. Este método está basado en dos premisas fundamentales: la acción del niño puede presentar diferentes cualidades y el objetivo de la enseñanza consiste en enseñar a realizar acciones que tienen determinadas propiedades. Las etapas por las cuales una acción pasa de ser externa a mental (Talizina, 2009) son las siguientes: etapa de motivación, etapa de orientación, etapa material, etapa materializada, etapa perceptiva, etapa verbal externa y etapa verbal interna.

- Etapa de la motivación

En la escuela es necesario enseñarles a los niños los objetivos que se deben alcanzar para que los productos establecidos correspondan a dichos objetivos. Lo principal de esta primera etapa consiste en la generación de una motivación necesaria en el escolar, de lo contrario es imposible la formación de las acciones y de los conocimientos que ellas implican. Una de las formas para la creación de la motivación es introducir al niño a situaciones problemáticas que sólo sean posibles de solucionarse por medio de la acción cuya formación ha de emprenderse. Los motivos que han de generarse pueden ser internos o externos, siempre y cuando la segunda opción sea un camino para encontrar interés a la actividad propuesta (Talizina, 2009).

- Etapa de elaboración del esquema de la base orientadora de la acción

La base orientadora de la acción constituye un desarrollo conceptual de la zona del desarrollo próximo de Vygotsky (1995). Para alcanzar este objetivo, además de garantizar el paso por las etapas de interiorización, es necesario determinar el contenido de la orientación específica que se le va a brindar al alumno, es decir, elaborar y presentar el esquema de la base orientadora de la acción (Solovieva, 2004). Dicho esquema incluye tanto la información, como las formas de interacción accesibles para el alumno.

Galperin (1969) precisa el sentido del término de orientación como una anticipación o creación de imagen. La orientación siempre anticipa la ejecución. El hombre puede aprender a orientarse no por sus sensaciones inmediatas, sino por los indicadores de instrumentos especiales. No son los aparatos los que dirigen su conducta, sino gracias a los instrumentos es capaz de orientar su conducta.

En cualquier método de formación el niño realiza tareas bajo la dirección del experimentador. Es decir, antes de que se realice cualquier actividad es necesario enseñar al niño a que se oriente y explore las condiciones de la situación (Solovieva, 2004), de esta manera estaremos desarrollando en el niño el eslabón de la base orientadora de la acción.

Para Galperin (2009), *la base orientadora de la acción* es un plan para la realización de una futura acción. Dicho plan consiste en formar la representación anticipada de

la tarea y el sistema de orientadores necesarios para cumplir con dicha tarea. El esquema de la base orientadora de la acción contiene la información que el adulto le proporciona al niño durante la tarea. También contiene la esencia operacional y el contenido de la acción que se realiza (Solovieva, 2004). Talizina (2009) amplió la definición de Galperin mencionando que la base orientadora de la acción es el sistema de condiciones en el cual realmente se apoya el sujeto para la realización de la acción.

Talizina (2009) considera que esta etapa es previa a la acción y condición para su cumplimiento debido a que el sujeto se apoya en éste sistema de condiciones durante la ejecución de la acción. Así, antes de realizar la actividad, el alumno debe darse cuenta de las acciones que conforman la solución de determinada tarea. No basta con comentarles el proceso, hay que mostrar en un inicio de forma materializada el proceso mismo de solución. Para ello es indispensable conocer las características necesarias y suficientes que le permitan al alumno elaborar una conclusión determinando la ausencia o presencia de dichas características en la solución de determinadas tareas. No sólo es importante la identificación de estos componentes sino el orden en que se presenten. Es mejor si los conceptos se introducen en sistemas, para comprender la relación entre ellos.

En esta etapa se le da a conocer al niño la nueva actividad y se les muestra el proceso de solución. El contenido de la base orientadora de la acción se puede presentar mediante un listado de las características necesarias y suficientes del concepto y mostrando las acciones que se deben realizar con el objeto propuesto, así como la secuencia de la ejecución (Talizina, 2009).

La realización correcta de la acción depende de tres aspectos: a) del aspecto suficiente de la base orientadora de la acción, si es completa o incompleta (características del concepto); b) de su generalidad, si se presenta de forma particular, para un caso único o si se presenta de forma general mostrando la esencia de toda una clase de casos concretos; c) del medio de obtención, si la base orientadora se le da al niño en forma preparada o si el niño la obtiene de manera independiente. Esta última puede darse a través de dos opciones, durante el proceso de la realización de la acción o durante el uso de un método general, el cual se le puede dar al niño de manera independiente o con ayuda del maestro

(Solovieva, 2004). En la tabla 3 se muestran las características de los ocho tipos de base orientadora que resultan de las relaciones de los elementos mencionados.

Tabla 3. Tipos de base orientadora de la acción

Tipo	Característica de generalización	Carácter completo o incompleto	Medio de obtención
1	Concreta	Incompleta	Independiente
2	Concreta	Completa	Dependiente
3	Generalizada	Completa	Independiente
4	Generalizada	Completa	Dependiente
5	Generalizada	Incompleta	Dependiente
6	Generalizada	Incompleta	Independiente
7	Concreta	Completa	Independiente
8	Concreta	Incompleta	Dependiente

Nota. De: Talizina, N. (2000). Manual de Psicología pedagógica. México: Universidad de San Luis Potosí.

El uso del primer tipo de base orientadora conlleva al niño a elaborarla de forma independiente con apoyo de un método general; sin embargo, esa búsqueda la realiza a través de ensayo y error porque en cada tarea varía la base orientadora lo que lo lleva a cometer varios errores, la acción formada puede perderse por la variación de cualquier condición. El uso del segundo tipo, la base orientadora se le da preparada al niño y para casos concretos, esto limita la acción debido a las semejanzas de las condiciones concretas de su ejecución (Talizina, 2009).

El tipo tres de orientación es el que contiene una estructura completa porque las orientaciones se representan en el tipo general que caracteriza a toda una clase de fenómenos (Talizina, 2009). Además es la que menor tiempo requiere para lograr una asimilación completa y sin errores (Galperin, 2009).

- Etapa del aspecto material o materializado de la acción

La forma básica de la acción es la material o materializada. En esta forma el niño manipula objetos concretos y puede hacer uso de apoyos materializados. No importa tanto si la forma sea material o materializada, siempre y cuando esta última sea una representación completa de los elementos necesarios en el contenido a asimilar, lo que importa más es que se permita las condiciones para la ejecución manual de las operaciones necesarias (Talizina, 2009).

La acción material o materializada permite descubrir el contenido de la acción. En esta etapa se despliegan todas las operaciones para lograr el carácter consciente de la acción y estas tienen que pronunciarse en voz alta para preparar el cambio a la etapa verbal externa. Es esencial que los alumnos trabajen con tarjetas que contengan la información que se está asimilando. Las tarjetas deben de incluir las características necesarias y suficientes del concepto y las acciones necesarias para lograr la asimilación (Talizina, 2009; Álvarez, 2001).

La forma materializada es un sustituto del objeto de la acción. Este modelo contiene aquellas cualidades que pertenecen al objeto asimilado (Talizina, 2009). La materialización de los elementos estructurales de la acción se tiene que realizar de tal forma, que permita garantizar las condiciones para la ejecución manual de las operaciones.

- Etapa de las acciones perceptivas

La forma perceptiva de la acción se origina a partir de las transformaciones de la acción material o materializada. Se considera una forma de acción intermedia entre la acción material o materializada y la verbal externa. El objeto de esta etapa, igual que la anterior, son los esquemas. La diferencia a la etapa anterior es que aquí se realizan acciones perceptivas con ellos. Esta etapa involucra el uso de imágenes y representaciones, en lugar de objetos concretos y apoyos materializados (Talizina, 2009).

Esta forma trata de acciones teóricas, ya no reales como en la etapa anterior. Por lo tanto en esta etapa las acciones se realizan con los ojos y no con las manos (Talizina, 2009).

- Etapa de las acciones verbales externas

De acuerdo con Zaporozhets, Zinchenko y Elkonin (1979), el lenguaje del niño puede adquirir una función planificadora sólo en la medida en que han adquirido un significado específico y se han convertido en un medio de generalizaciones conocidas formadas durante el conocimiento práctico.

La orientación en la forma verbal conduce a que las habilidades y los conocimientos se asimilen en su forma verbal. La formación completa y válida de la acción verbal

presupone un grado determinado de generalización de su forma material. Ha de ser un reflejo de la acción material. El niño debe ubicar tanto el contenido objetal como la expresión verbal del mismo contenido. Para esto es necesario que el niño pronuncie en esta nueva etapa todas las acciones implicadas en la forma material. Es importante considerar que no se trata de la habilidad de comentar como hay que realizar la acción sino de la habilidad para la realización de la acción en forma verbal. La pura sustitución mecánica de un movimiento por una palabra es ineficaz para cambiar la naturaleza de las operaciones intelectuales (Talizina, 2009).

En esta etapa el habla pasa a ser portadora tanto de la tarea como de la acción. También en esta etapa todas las operaciones deben ser desplegadas, se debe de seguir evitando la automatización y reducción de la acción. Para el análisis, por parte de los alumnos, en esta etapa no se propone el uso de objetos ni sus modelos sino el de sus descripciones (Talizina, 2009).

#### - Etapa de las acciones mentales

Esta etapa también es denominada por Talizina (2009) como etapa del lenguaje interno. La acción mental es la forma final de la transformación por etapas de la acción material y es logro máximo del desarrollo intelectual y de la adquisición del concepto. En esta etapa, el niño no necesita de objetos o palabras, imágenes externas. Ahora el niño realiza la acción en su mente, operando con las imágenes de los objetos.

La acción, al pasar al plano mental, sigue siendo una acción con objeto, sin embargo antes el sujeto realizaba la acción transformando los objetos y ahora sólo la realiza en su mente, cambiando las imágenes de los objetos en su mente (Talizina, 2009). Se trata de acción intelectual con conceptos. La metodología de la enseñanza debe favorecer a la adquisición de las acciones mentales, iniciando desde los niveles anteriores (Solovieva, 2004).

Por último, para saber que una acción se ha interiorizado Talizina (2009) ha establecido las características que se describen a continuación.

a. Racionalidad de las acciones de los sujetos. La racionalidad es entendida como la orientación de los alumnos en todo el sistema de características esenciales. En sus investigaciones se proponen tres tipos de problemas para observar esta

características: a) los problemas que incluyan el conjunto completo de condiciones pero el dibujo (esquema) no corresponde a las condiciones de éste; b) problemas con el conjunto incompleto de condiciones y sin el dibujo (esquema) y c) problemas con condiciones incompletas y con el dibujo inadecuado para estas.

b. Carácter consciente de la asimilación. Los alumnos argumentan sus propias acciones, señalando las bases en las cuales ellos se apoyaron para dar la respuesta.

c. Ausencia de excesivo apego a las propiedades sensitivas de los objetos. Los alumnos se apoyan en las características esenciales, las utilizan adecuadamente y, por tanto, no se enganchan de las características casuales, incluso cuando estas son más llamativas y constantes en los objetos.

d. La generalización de los conceptos y las acciones. Se observa en dos vías: primero, se comprueba la capacidad de los sujetos para aplicar los conceptos y las acciones formadas en condiciones que en cierto grado se diferencian de las condiciones de enseñanza, aquí el sujeto debe reconocer los objetos de la misma clase pero en otras condiciones concretas. Segundo, se observa la influencia que los conceptos formados ejercían en el proceso de formación de nuevos conceptos tanto de la misma rama de conocimientos como de otra, sustancialmente distinta.

e. Estabilidad de los conceptos y de las acciones formadas. Después de algunos meses de la formación del concepto se tiene que observar si los sujetos tienen las mismas posibilidades que después de la enseñanza.

f. Reducción de la acción y medida de su asimilación. Por vía indirecta se puede observar la reducción por el incremento de la velocidad del cumplimiento de la tarea.

### **3.4 Aportaciones a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas**

De acuerdo con Davíдов (1974), los psicólogos y pedagogos deben considerar que el ingreso del alumno a la escuela se caracteriza por la formación de conceptos científicos, los cuales requieren de un procedimiento distinto e inesperado en comparación a como el pequeño trataba los significados de las palabras. El principio

es que la educación debe conllevar al desarrollo, por lo que los programas deben considerar acciones que influyan sobre este.

La enseñanza tradicional se caracteriza por tener mayor predominio del carácter visual, lo cual es necesario sustituir por el carácter objetual, es decir, el señalamiento exacto de aquellas acciones específicas que son indispensable efectuar con los objetos para: revelar el contenido del futuro concepto y representar este contenido en forma de modelos conocidos. Además, este principio brinda la posibilidad y conveniencia de que los alumnos descubran el contenido general de un cierto concepto como base para la ulterior identificación de sus expresiones particulares. Por lo que lo general se comprende como la conexión genéticamente inicial del sistema estudiado, la que en su desarrollo y diferenciación genera el carácter del sistema concreto (Galperin, et. al., 1969).

Los autores anteriores proponen que la estructuración de la labor escolar deben considerar los siguientes principios (Davíдов, 1974, Galperin et al. 1969).

- 1) Todos los conceptos que constituyen la disciplina escolar dada deben ser formados por los alumnos, no deben darse como conocimientos ya listos.
- 2) Es necesario revelar el origen de los conceptos y su correspondencia con las exigencias de la ascensión de lo abstracto a lo concreto.
- 3) En el estudio de las fuentes objetual-materiales de unos y otros conceptos los alumnos deben descubrir la conexión genéticamente inicial, que determina el contenido y la estructura del campo de conceptos dados (por ejemplo, para todos los conceptos de la matemática escolar esta conexión general es la de las magnitudes).
- 4) Es necesario reproducir esta conexión en modelos objetuales, gráficos o simbólicos especiales que permitan estudiar sus propiedades en forma pura (por ejemplo, los niños pueden representar las conexiones generales de las magnitudes en fórmulas con letras).
- 5) Específicamente hay que formar acciones objétales que permitan a los niños revelar en el material de estudio y reproducir en los modelos la conexión esencial del objeto y luego estudiar sus propiedades (por ejemplo, para revelar la conexión que está en la base de los conceptos de números enteros, quebrado y reales es

necesario formar en los niños una acción especial para determinar la característica de divisibilidad y multiplicidad de las magnitudes).

6) Los alumnos deben asimilar y pasar paulatinamente de las acciones objetales a su realización en el plano mental.

Las leyes del desarrollo psicológico son condiciones que se deben considerar cuando se selecciona el contenido, se organizan los programas y se estructuran los nuevos métodos de enseñanza. La forma de enseñanza de la escuela tradicional, basados en la descripción verbal y la demostración de modelos (que requieren de resultados y acciones indispensables para lograrlos) no han sido eficaces debido a que existe una gran desigualdad entre los alumnos en cuanto al éxito en los estudios (Talizina, 2009).

Debido a lo anterior, uno de los objetivos en los últimos años de la teoría de la actividad (Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010) aplicada a la enseñanza ha sido convertir el proceso no organizado y espontáneo de asimilación de cifras en un proceso dirigido y organizado, en el sentido de identificar aquellos conceptos que deben formarse. Además, debe tenerse en cuenta que en cualquier sistema para dirigir el proceso de asimilación se estructura sobre la base de determinada concepción psicológica sobre el proceso a dirigir. Antes de abordar el proceso de asimilación es necesario comprender el modelo desde el cual se organiza el contenido de los métodos, en caso contrario se puede cometer el error de trabajar con falsas metodologías y caer en los métodos tradicionales, el cambio no solo puede ser en la parte práctica, la cual ha cobrado relevancia, sino debe abordarse desde teorías que expliquen y permitan el desarrollo conceptual de los alumnos.

Uno de los obstáculos esenciales para la organización de los programas y métodos de enseñanza son las concepciones naturalistas o espontáneas sobre el aprendizaje. A partir de las investigaciones de Vygotsky (1995, 2006; 2008), Leontiev (2003) y seguidores se ha establecido que el aprendizaje del hombre no transcurre por adaptación a las condiciones ya existentes, sino a través de la experiencia social, acumulada por las generaciones precedentes. El aprendizaje tiene la característica de su formación durante la vida mediante acciones generalizadas que transmiten los adultos. A partir de esto, la organización de los programas de enseñanza debe considerar no solo la complejidad del material

empírico, sino la enseñanza de procedimientos generalizados de acción con este material.

El proceso de asimilación se debe subordinar a las leyes específicas que correspondan con los contenidos de los métodos de enseñanza. Es necesario dejar las ideas subjetivo-idealistas, introspeccionistas sobre la naturaleza de los procesos psíquicos. Estas ideas resaltan que los procesos aparecen como inicialmente internos, existentes siempre en forma ideal sin relación alguna con la actividad material externa del alumno. Las investigaciones de Galperin (2009) han mostrado que los procesos psíquicos internos representan acciones mentales, las cuales han sido formadas como reflejo de las acciones externas, materiales y que reciben su forma definitiva como resultado de consecutivas transformaciones y abreviaciones. La organización de la actividad objetiva externa asegura que el alumno asimile los conceptos. Este ha sido considerado como un principio fundamental en la actividad escolar (Talizina, 2009).

Diversas investigaciones realizadas por Zaporozhets (1948, en Davíдов y Shuare, 1987) y sus colaboradores evidencian el papel determinante de la parte orientativa en la ejecución y formación de la acción. De acuerdo con Galperin (2009) la base orientadora de la acción (conjunto de circunstancias en el que el niño se orienta durante la ejecución de la acción) garantiza el cumplimiento de la acción. En la enseñanza se ha podido identificar tipos de orientación considerando las siguientes características: en qué grado es completa y cómo está compuesta (empíricamente, para algunos conocimientos o por un procedimiento racional-genético aplicable a cualquier tarea del área estudiada). El conocimiento sobre los objetos es un producto de las acciones con estos objetos. Las acciones tienen un proceso de transformación, a medida que se forman se convierten en capacidades y, a medida que se automatizan, se convierten en hábitos. Con esta cualidad, el tipo de organización y la formación por etapas de las acciones objetivas son un proceso central de asimilación de nuevos conocimientos, capacidades y hábitos.

Lo anterior plantea a la Psicología y Pedagogía una tarea difícil, pero muy interesante: dirigir la asimilación de los nuevos conocimientos y habilidades. Una de las soluciones a este problema es poner al descubierto ante los alumnos aquellos

aspectos de la realidad que constituyen el contenido de la ciencia dada y en los que los alumnos deberán orientar sus acciones durante el estudio.

La etapa inicial de la asimilación consiste en mostrar al niño las propiedades de la realidad, cuyo estudio constituye el contenido de cada área concreta del conocimiento, en formar la base orientadora de las acciones del alumno en esta área. De lo correcta y completa que sea la base orientadora de la acción, que se forma desde el inicio mismo del proceso, depende, en gran medida el éxito de toda la asimilación. No obstante, el proceso de asimilación solo empieza, por lo que es necesario dirigir el proceso de formación por etapas de las acciones y su perfeccionamiento según los parámetros dados: la conversión de la forma material-objetal y posteriormente su abreviación y automatización. En el curso de este proceso transcurre la asimilación, es decir, la transformación de la base orientadora de la acción en conocimientos, conceptos, y de la acción misma, en capacidades y hábitos.

A partir de lo anterior se identifica a la orientación como elemento fundamental en la organización de la enseñanza, por lo que es esencial en los métodos de enseñanza. Así, conceptualizaremos el método de enseñanza como la organización del sistema de acciones que utiliza el maestro para formar los conceptos de una asignatura, el contenido de los métodos de enseñanza son: tipo de orientación, contenido de la asignatura, tipo de acciones que utilizan para la formación de conceptos y la interacción entre maestro-alumno, alumno-objeto y alumno-alumno.

Por otro lado, Vygotsky (2006, 2008) consideraba que los conceptos eran producto especial del pensamiento que poseen dos características básicas en su desarrollo. La primera es que tienden a hacer generalizaciones, las cuales llevan a abstracciones de las cualidades de cosas y sucesos, mientras que la segunda es que los niños primero operan con ellos y después son conscientes de ellos. Para saber cómo está constituido un concepto es necesario considerar los elementos que lo componen, y el niño no es consciente de dichos elementos solo por el hecho de usarlos en la práctica.

De acuerdo con la propuesta de Vygotsky (2008), existen dos tipos de conceptos, los cotidianos y científicos. Los primeros son adquiridos a partir de las experiencias concretas y de forma no intencionada; mientras que los conceptos científicos se

desarrollan de forma consciente y tienden a hacer generalizaciones. Además un concepto científico hace referencia al conocimiento de los rasgos y propiedades esenciales de los diferentes objetos o fenómenos de la realidad objetiva, así como de las relaciones entre ellos. Estas propiedades tienen una jerarquía que permite identificar si un objeto de conocimiento pertenece o no a dicho concepto (Shardakov, 1987, citado en Cervantes, 2009; Talizina, 2009).

Considerando las premisas anteriores, se han desarrollado grupos de investigación sobre la enseñanza de la lectura, gramática y aritmética (Davíдов, 1988). En este último se ha enfatizado en el conocimiento de la magnitud como propiedad de los parámetros físicos de los objetos materiales y el pasaje a los tipos de relaciones posibles entre las magnitudes y sus determinaciones cuantitativas, es decir, el tránsito a las principales relaciones matemáticas.

Davíдов (1988) y Galperin (2001) consideran que el principal objetivo de las matemáticas escolares es lograr la comprensión del concepto de número en los alumnos. Éste es concebido como el resultado de la relación entre una magnitud y la medida, el cual involucra la acción de medición. El trabajo con la medida permite introducir el concepto de unidad, es decir, de la relación de aquello que se mide y que es igual a su medida. Esta medida permite formar el sistema numérico decimal, considerando a la decena como una nueva medida, producto del aumento de la medida anterior (unidad) una cierta cantidad de veces. De manera similar se introducen otras unidades y clases (posicionales).

La inclusión del sistema numérico decimal permite trabajar de inmediato con las operaciones de suma y resta, y sobre la base del concepto de la medida se inicia también la multiplicación. La multiplicación es obtenida al aumentar una medida una cierta cantidad de veces. La división permite obtener la primera medida (unidad), se conoce la medida y magnitud, pero se desconoce la cantidad de veces que fue utilizada (Salmina, 2017).

En relación con la solución de problemas, se enfatiza en que cada problema incluye una pregunta fundamental, cuya respuesta constituye el objetivo de la solución. Para poder responder la pregunta final (o preguntas intermedias) del problema, se tiene que analizar determinados datos, es decir, obtener la información necesaria y suficiente de los nexos matemáticos y lógico formulado por el problema. Esto se

obtiene mediante la actividad orientativo-investigativa, que constituye uno de los componentes de la actividad intelectual (Galperin, 2001). Sólo sobre la base de los datos, obtenidos a partir de la actividad orientativo-investigativa, el alumno puede elaborar el esquema general para el contenido del problema estableciendo los datos, las relaciones esenciales entre ellos y las posibilidades para responder a la pregunta final. Posteriormente, es factible encontrar las operaciones aritméticas que correspondan con el plan creado (Tsvetkova, 1999). El maestro no simplemente debe presentar y anunciar el problema, sino mostrar qué hay que hacer para que el alumno logre solucionar un problema. Para ello, se debe conocer de qué tipo de acciones intelectuales se incluyen en el proceso de solución de cualquier problema de un grado escolar determinado y en qué orden se deben realizar (Talizina, 2009).

### **3.5 Método de enseñanza**

A partir de las premisas expuestas en el marco teórico como en antecedentes, proponemos definir método de enseñanza a la forma en que el maestro organiza los elementos necesarios para la enseñanza de una asignatura y los resultados que obtiene en relación al desarrollo conceptual en los alumnos. Los elementos del método de enseñanza fueron identificados en las investigaciones que utilizan el método formativo experimental para desarrollar tanto conceptos como habilidades matemáticas, debido a que han mostrado de forma desplegada tanto el contenido matemático como su relación con el desarrollo psicológico, es decir, las características esenciales de los conceptos matemáticos, las acciones por las cuales se forman y los elementos orientativos que se requieren en la asimilación de dichos conceptos.

También, a partir del análisis de las investigaciones basadas en el paradigma histórico-cultural ha sido posible identificar elementos significativos que se relacionan con el aprendizaje de las matemáticas. Por esta razón, nosotros retomaremos la forma de comunicación que utilizan los docentes, la forma en que interactúan los alumnos y la forma en que utilizan los materiales concretos (Steel, 2001).

Así, podemos considerar el contenido de concepto de método de enseñanza, en el primer lugar, la organización de los conceptos de la asignatura (matemáticas), en

segundo lugar, las acciones que se le piden a los alumnos en las clases, en tercer lugar, la forma en que se da la explicación (orientación), en el cuarto lugar, el tipo de la interacción que existe entre los alumnos y, en quinto lugar, los resultados que se obtiene a partir de ese proceso de enseñanza. De la forma específica, se proponen los siguientes elementos (tabla 4).

Tabla 4. Elementos del concepto de método de enseñanza de las matemáticas

Elemento	Indicadores
1) Sistema y jerarquía de conceptos	Niveles de conceptos, ausencia de conocimientos conceptuales
2) Tipos y planos de acciones	Acciones materiales-materializadas, acciones perceptivas concretas, perceptivas simbólicas, verbales orales, escritas, combinaciones de estas, etc.
3)Tipos de orientación	Completa - incompleta, generalizada - particular, independiente – dependiente
4)Formas de interacción	Maestro-alumno, alumno-alumno, alumno-objeto, alumno individual, etc. Comunicación asertiva, autoritaria, emotiva.

- 1) **El sistema y jerarquía de conceptos** se refiere al planteamiento específico de enseñanza que puede partir de conceptos únicos que se mencionan en el programa que utiliza el maestro, uso inicial de conceptos generales; presentarlos como unidades aisladas, no referirse a los conceptos previamente estudiados siguiendo solo el orden de presentación de los conocimientos o, por el contrario, usarlos como referencia de la manera constante en el proceso de la enseñanza; establecer relaciones jerárquicas entre los conceptos y comparar unos conceptos con otros durante las clases o no establecer dichas referencias, etc. (Vygotski, 2006; Talizina, 2009; Rosas, Solovieva y Quintanar, 2017).
- 2) **Los tipos y niveles de acciones** utilizadas por el maestro se refieren al uso de tareas predominantemente a la copia, escritura independiente, solución de

problemas o ejemplos en el plano externo, con base a los esquemas conceptuales, uso de objetos y/o símbolos, realización de mapas o esquemas, planes de las acciones, etc. Finalmente, se puede hablar de tareas abiertas creativas, tales como elaboración de problemas por parte de los alumnos en las matemáticas a partir de las situaciones señaladas previamente (Talizina, 2009).

- 3) **Los tipos de orientación** fueron establecidos dentro de la concepción de Galperin (2009). Este autor plantea la existencia de uso de orientación completa o incompleta, generalizada o concreta; dependiente o independiente durante el proceso de la enseñanza-aprendizaje. En diversos estudios experimentales y teórico-metodológicos se han propuesto orientaciones completas, generalizadas que obtenían sentido independiente para los alumnos en diversas áreas de conocimiento (Galperin, 1985 en Talizina, 2009; Solovieva, 2004). De acuerdo con los datos de estos estudios y la opinión de los autores, seguidores de dicho enfoque, el tipo de orientación más óptimo para la enseñanza es la orientación completa, generalizada e independiente. Sin embargo, en la vida práctica de las situaciones escolares hace falta valorar los tipos de orientación que pueden tener lugar en la vida real.
- 4) **Las formas de interacción** Se puede tratar del trabajo en grupo o individual de cada alumno, así como la interacción de la maestra con los alumnos (Rubtsov, 1996). También se refieren a tipos de comunicación: autoritaria, amistosa, sobreprotectora, etc. (Obujova, 1977).

Consideramos que las premisas teóricas presentadas nos acercan de forma dialéctica a un fenómeno educativo, permitiéndonos analizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un proceso y considerar a los participantes integrantes de la misma (maestros-alumnos). Desde el principio establecido de la relación entre la enseñanza y el desarrollo psicológico de los alumnos (Vygotski, 2006) coincidimos en que el objetivo de la educación, desde la teoría de la actividad (Talizina, 2009; Davidov, 1988; Galperin, 2009), es el desarrollo de conceptos científicos en los alumnos. Ser conscientes de que los conceptos científicos se organizan y forman en las aulas escolares, le permite al maestro investigar las

acciones que le permiten cumplir dicho objetivo. Además, le permite realizar junto con el alumno las acciones en diversos planos para favorecer la asimilación. En matemáticas el uso de objetos es necesario, mas requiere de tener un contenido matemático que sea posible generalizar. Por lo anterior, el papel de la orientación continua siendo fundamental, de acuerdo con Galperin (2009) y Solovieva (2004).

El paradigma histórico-cultural nos brinda las siguientes herramientas; a) concepción dialéctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje (actividad de estudio), b) el papel de la enseñanza como actividad de desarrollo conceptual en los alumnos; c) la formación de conceptos a partir de la formación de acciones en diversos planos de ejecución; d) el desarrollo de conceptos y habilidades matemáticas en la edad escolar, e) una forma de organización de la enseñanza y aprendizaje (método de enseñanza), f) la posibilidad de acercarnos a los maestros-alumnos de forma dinámica, utilizando la evaluación dinámica e interventiva que permite identificar la zona de desarrollo próximo, para lo cual también se requiere el conocimiento del desarrollo de conceptos y habilidades matemáticas.

#### **4. Metodología**

Esta investigación se basó en una perspectiva cualitativa, debido a nuestro interés de conocer la forma de enseñanza de las matemáticas que existen en tres colegios con diferentes posturas y su relación con los tipos de conceptos que surgen como su producto. No pretendemos obtener ningún tipo de datos cuantitativos, ni realizar comparaciones numéricas, debido a que esto no permite conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje ni considerar los significados o necesidades de los participantes. En esta investigación resultó fundamental poder interactuar con los maestros y sus alumnos mediante diferentes tareas. Consideramos que la metodología cualitativa nos permitió conocer ese proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del aula escolar.

Diversos autores coinciden en la necesidad de considerar la construcción de conocimiento en lugar de la repetición o constatación del mismo, la interacción entre el investigador y su objeto de estudio para identificar los significados del mismo en lugar de alejarse para lograr la objetividad y la perspectiva social del sujeto, lo cual permite identificar las estructuras regulares e irregulares en las que está inmerso el sujeto, en lugar de percibirlo como global y generalizable (Flick, 2007; Erickson, 1997; Girola, 1992). Los criterios descritos orientaron el papel del investigador y de los participantes, la elección y diseño de instrumentos (enfaticando en el diálogo como principal proceso de producción de conocimiento) así como el análisis de los datos.

El método cualitativo es un modelo específico de análisis del mundo, tiene por objetivo la comprensión de los fenómenos sociales desde las experiencias y puntos de vista de los actores sociales (González, 2001, citado en Izacara, 2009). Los métodos cualitativos utilizan instrumentos de recolección de información que se relacionan entre sí como producto de una interacción activa con los participantes. Consideramos que el análisis cualitativo posibilita riqueza metodológica para establecer las relaciones entre fenómenos y situaciones del mundo, así como interactuar productivamente con los participantes de las investigaciones.

Específicamente el carácter cualitativo es definido por los procesos implicados en la construcción del conocimiento, debido a que el tipo de instrumentos no es

característica suficiente para diferenciar la investigación cualitativa de la cuantitativa. La epistemología cualitativa planteada por González (2000) es una búsqueda de formas diferentes de producción de conocimiento que permite la creación teórica acerca de la realidad plurideterminada, diferenciada, irregular, interactiva e histórica, que representa la actividad humana. Esta epistemología cualitativa se apoya en tres principios:

El primer principio se refiere a que el conocimiento es una producción constructiva-interpretativa, es decir, el carácter interpretativo es generado por la necesidad de dar sentido a expresiones del sujeto estudiado. Es un proceso, en el cual el investigador integra, reconstruye y presenta en construcciones interpretativas diversos indicadores obtenidos durante la investigación, las cuales pierden su sentido cuando son tomadas como constataciones empíricas. La interpretación es un proceso diferenciado que le da sentido a diferentes manifestaciones de lo estudiado y las convierte en momentos específicos del proceso general, orientado a la construcción teórica del sujeto. La teoría está presente como instrumento al servicio del investigador en todo este proceso de interpretación (González, 2005, en Barbosa, Galdolfo y Mitjásns, 2016).

El segundo principio hace referencia al carácter interactivo del proceso de producción del conocimiento. El principal escenario de la investigación son las relaciones entre el investigador-investigado y las relaciones de los sujetos investigados entre sí en las diferentes formas del trabajo grupal que la investigación presupone. Considerar el carácter interactivo otorga un valor relevante a los diálogos que se desarrollan durante la investigación, en los cuales los sujetos involucran sus procesos cognitivos, emocionales y se comprometen a la reflexión para la producción de significados esenciales para la investigación. El investigador se involucra en el proceso de investigación (González, 2005, en Barbosa, Galdolfo y Mitjásns, 2016).

Por último, el tercer principio es la significación de la singularidad como nivel legítimo de la producción del conocimiento, esto implica considerar al sujeto como singularidad, identificarlo como forma única y diferenciada de constitución subjetiva. El número de sujetos que se requiere en la investigación se define por las necesidades del proceso de conocimiento descubiertas en el curso de la

investigación. La legitimación del conocimiento se produce, por lo que significa una construcción o un resultado en relación con las necesidades actuales de la investigación (González, 2005, en Barbosa, Galdolfo y Mitjás, 2016).

El método cualitativo nos brinda los lineamientos para lograr el objetivo de investigación, debido a que permite crear el contenido de nuestras herramientas de investigación (entrevista, protocolo de evaluación y la observación) a partir de la construcción de nuestro objeto de estudio (método de enseñanza), basado en el paradigma histórico-cultural. Por esta razón existe una coherencia entre los conceptos y la metodología. Además, la forma en la que el investigador se inserta en el campo, a partir del método cualitativo, permite la interacción activa y flexible con el objeto de estudio y con los participantes, así mismo favorece el establecimiento de una constante comunicación para recolectar la información con diversos instrumentos y estrategias que permiten contar con mayor grado de objetividad, confiabilidad y argumentación.

#### **4.1 Tipo de investigación**

Al ser una investigación en el área de educación decidimos hacer uso de la investigación evaluativa porque nos permite y marca una opción de camino por el cual obtener la información necesaria para responder nuestra pregunta de investigación y cumplir nuestros objetivos de investigación. Sabemos que la palabra evaluación puede tener connotaciones negativas y en ocasiones parecer mostrar solo un estado, una fotografía, sin embargo, plantearemos la evaluación conforme Vygotsky la consideraba, un proceso dinámico e interventivo para conocer sus máximas potencialidades, así como descubrir su origen y proceso. Si bien no tenemos una investigación longitudinal que nos dé mayor análisis en relación con el tiempo, si intentamos descubrir el movimiento y esencia de cada método de enseñanza en los colegios correspondientes.

Durante la revisión de los tipos de investigación en el área de la educación, descubrimos que la investigación evaluativa nos permitiría identificar los elementos de los métodos de enseñanza de matemáticas y los resultados que se obtienen posteriores a su aplicación. Este tipo de investigación permite estudiar el objeto elaborado a partir de una teoría, en nuestro caso la teoría de la actividad aplicada a

la enseñanza (Talizina, 2009). Es necesario enfatizar que no es nuestro objetivo evaluar el programa de enseñanza de una forma aislada o mediante prejuicios empíricos. Específicamente, este trabajo se ubica entre las investigaciones evaluativas que se dirigen hacia el análisis de los procesos que no pueden ser determinados solo por sus contextos (Parlett y Hamilton, 1983, citado en Lukas, 2012). En estos casos el contexto no explica y no caracteriza al objeto de estudio, aunque participa como un elemento de este. De esta forma, fue posible introducir el objeto de estudio de método de enseñanza que surge, se elige o se utiliza en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cada colegio.

#### **4.2 Diseño de la investigación**

Considerando que el diseño de investigación nos delimita la estructura en que son recolectados y construidos los datos, nosotros elegimos los diseños propuestos por Parlett y Hamilton (1983, citado en Lukas, 2012) y las investigaciones que tuvieron como objetivo conocer cómo se enseña matemáticas en el aula escolar (Steele, 2001; Ngee-Kiong, Singh y Hwa, 2009). Decidimos utilizar la observación en clase, debido a que permite conocer la dinámica y aplicación de la planeación que realizan los docentes. Posteriormente realizamos la entrevista con las maestras para identificar los elementos de su forma de enseñanza, así como aclarar las dudas que surgen durante la observación, en ocasiones fue posible realizar el análisis retrospectivo, esto dependió del tiempo que las maestras disponían. Finalmente, decidimos trabajar con los niños de forma individual para dar tipos de apoyo (lógico-verbal, perceptivo o material) y conocer tanto lo que realizan de forma independiente como lo que logran con ayuda, es decir, zona de desarrollo real y próximo (Vygotsky, 2006; Solovieva, 2004).

A continuación, describimos el proceso que nos orientó para recolectar la información.

1) La **observación** dentro del marco de la investigación educativa permite que el investigador se familiarice con los participantes en su contexto, específicamente la observación dentro del aula brinda el conocimiento global del programa escolar que aplica el maestro (Parlett y Hamilton, 1983, citado en Lukas, 2012). Además, la observación de la actividad docente en el aula implica concebirla y describirla en

términos de lógica, como un método de investigación que constituye un todo organizado, operable y pensable (Bazdresch, 2012). Las fases de la observación de acuerdo con Adler y Adler (1998, citado en Flick, 2007) son: a) selección de un entorno, en nuestro caso fue el aula escolar, 2) la definición de lo que se va a documentar, específicamente fueron los elementos del método de enseñanza (orientación, sistema de conceptos, sistema de acciones, uso de materiales, interacción entre alumnos y maestro-alumno), 3) la formación de los observadores en los tipos: descriptiva (una presentación general e inicial del campo), observación focalizada (aspectos relevantes a la pregunta de investigación), observación selectiva (atender aspectos centrales) y llegar a la saturación teórica, cuando las observaciones sean suficientes y ya no proporcionen elementos.

Para lograr la objetividad de los datos utilizamos la triangulación de las observaciones con otras fuentes de datos. En esta investigación fue utilizada la entrevista con la maestra y la evaluación dinámica de los niños para identificar si los elementos del método (objetivo, conceptos, acciones y resultados) coinciden con las habilidades que han asimilado los niños. La entrevista es el mejor instrumento para identificar la concepción de las matemáticas y forma en la que la maestra planea su método de enseñanza, aunque este instrumento no es suficiente ni permite obtener un cuadro completo y datos confiables acerca del mismo. Por esta razón nos vimos obligados a utilizar la observación para saber si lo que la maestra organiza y planea es lo que se logra en la práctica y cómo reestructura a partir de sus resultados. Al mismo tiempo, fue necesario identificar si ese proceso de enseñanza cumple sus objetivos en el aprendizaje de los alumnos, por lo que seleccionamos el uso del protocolo de evaluación de conceptos matemáticos, que incluye tareas que permiten ver la comprensión y ejecución de dichos conceptos. De esta forma establecimos como principales instrumentos de ampliación de la información, la entrevista y la evaluación con los niños. Estos instrumentos se describen en el siguiente punto del diseño.

2) La ampliación de información implica que el investigador se interesa por comprender el porqué del fenómeno educativo (Parlett y Hamilton, 1983, citado en Lukas, 2012), en nuestro caso el método de enseñanza. En esta fase utilizamos la

entrevista de tipo semi-estructurada al docente y la evaluación del desarrollo de conceptos matemáticos en niños.

**Entrevista a docentes.** Para ampliar la información y comprensión de la enseñanza de las matemáticas específica en cada aula, fue aplicada la entrevista a maestras, la cual fue de tipo dirigida semi-estructurada. Considerándola como una guía de preguntas que contienen varias áreas temáticas relacionadas a los elementos del método de enseñanza propuesto en marco teórico. También, se caracteriza por tener preguntas abiertas, organizadas por la estrategia de embudo: de lo más amplio a lo más pequeño, de lo más superficial a los más profundo, de lo más informativo a lo interpretativo, y de datos a lo interpretativo de los mismos. Además, esta entrevista tuvo un carácter dinámico, debido a que permite la corrección, inclusión de elementos diversos durante su realización o el regreso al campo según las necesidades.

**Evaluación a los niños.** Durante la investigación se aplicó el protocolo de evaluación para los niños. Trabajamos una evaluación dinámica que se realizó en forma de colaboración entre niño y adulto. Esta evaluación fue individual y presupuso el uso de apoyos comunicativos y conceptuales necesarios. La evaluación se caracterizó por describir el proceso de solución de tareas que requieren la formación de un concepto, además nos permitió identificar lo que el niño puede realizar por sí mismo y lo que logra realizar en la actividad conjunta con los adultos (zona de desarrollo próximo) (Vygotsky, 2006; Galperin, 2013). Por las razones mencionadas, se requiere que el investigador conozca de dichos conceptos, así como de los tipos de ayuda comunicativa y de orientación conceptual que brindará a los alumnos. Estos tipos de apoyo fueron dados en el siguiente orden: 1) lógico-verbal (repetición, preguntas dirigidas, uso de conceptos, algoritmos,) 2) perceptivo (esquemas, dibujo) y 3) material (uso de palitos de conteo). Además, estos tipos de apoyo pueden darse de forma simultánea, de acuerdo con lo que alumno necesite.

### 4.3 Tipo de muestra

La selección de participantes fue realizada de forma intencional (Izacara, 2009), de acuerdo con los criterios específicos que permitieron cumplir nuestro objetivo de la investigación. De acuerdo con este autor, en la investigación cualitativa el investigador decide quiénes serán los participantes y cuántos, la selección por lo tanto se basa en las necesidades de la investigación (Namak-foroosh, 2002, citado en Izacara, 2009). Específicamente se requieren seleccionar los casos que permitan realizar el análisis y las comparaciones significativas con relación a las preguntas de investigación, teoría y tipo de explicación que se desea desarrollar. Existen diferentes tipos de muestro intencional. En esta investigación utilizamos el muestreo según determinados criterios; los participantes que se incluyeron son los que cumplen uno o varios criterios específicos y relevantes para el cumplimiento de los objetivos de investigación. Estos criterios son descritos a continuación.

A partir de los resultados de la investigación de Rosas (2012), identificamos a un Colegio privado, Colegio Kepler, ubicado en la ciudad de Puebla como una escuela innovadora que basa su enseñanza en la organización de programas formativos a partir de las premisas del paradigma histórico-cultural y la teoría de la actividad. La aplicación de dichos programas formativos ha mostrado que alumnos de segundo grado de primaria son capaces de asimilar el concepto de número, asimilar las acciones matemáticas (aumento, disminución, aumento a partir de una medida, disminución a partir de una medida), así como solucionar problemas que contienen datos directos e indirectos a partir del uso de algoritmos. Por ser el Colegio Kepler el único que utiliza el aparato teórico-metodológico histórico-cultural, se consideran sus características demográficas y sociales para seleccionar a los otros colegios. Entre dichas características se encuentran: uso de un programa de enseñanza identificado por la maestra, colegio privado del sector urbano, nivel socio-económico medio y cantidad pequeña de niños en grupos escolares.

El primer criterio que establecimos fue seleccionar Colegios que tuvieran un programa de enseñanza de las matemáticas, con el cual obtuvieran resultados favorables, como lo es el colegio Montessori, éste se caracteriza por basar sus prácticas educativas en las premisas constructivistas. Hablando específicamente en

las matemáticas, se enfoca en el desarrollo lógico a partir del uso de materiales concretos (método bancubi, regletas).

El siguiente colegio que decidimos incluir en la investigación, fue un colegio privado que utilizaba como base para su enseñanza el programa oficial establecido por la SEP (2011), el cual es declarado como de Competencias. Como un ejemplo de lo que ocurre en la mayoría de los colegios que basan su enseñanza en los lineamientos establecidos por la Secretaría de Educación Pública.

En resumen, seleccionamos por criterio de conveniencia los colegios privados que basan su enseñanza en: 1) teoría de la actividad (Colegio Kepler-K), 2) modelo Montessori (Colegio M) y 3) enseñanza basada en programa SEP (competencias) (Colegio S). El primer y segundo colegio se ubica en Puebla, mientras que el tercero se ubica en la Ciudad de México.

El siguiente criterio que establecimos fue que las maestras tuvieran identificado, por lo menos en un sentido formal, el programa de enseñanza que utiliza o en el que se basa para enseñar los contenidos matemáticos. Esta información fue conseguida en la entrevista de presentación del proyecto de investigación al director de cada colegio.

Una vez que identificamos los colegios y las maestras, consideramos la cantidad de alumnos, la cual desde nuestro punto de vista no debería ser estricto, sin embargo para evitar que se relacionen los resultados de la investigación al número de alumnos se tomó en cuenta esta característica. Nuevamente, como el colegio Kepler es el único que basa su enseñanza en el modelo histórico-cultural consideremos el número de alumnos que tiene el grupo de tercer grado de primaria, el cual fue siete. Por lo que establecimos el objetivo de buscar colegios que tuvieran como máximo 10 alumnos y como mínimo 6 alumnos.

A partir de los criterios descritos logramos trabajar con tres Colegios. El orden de aplicación fue: 1) Colegio Kepler que basa su enseñanza en el modelo histórico-cultural y la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza y 2) Colegio por competencias que basa su enseñanza en el modelo por competencias, 3) Colegio Montessori, que basa su enseñanza en el modelo Montessori. Además, los tres colegios retroalimentan su forma de enseñanza con investigaciones educativas, por

lo que facilitaron nuestra participación. En el colegio por competencias existe solo un grupo de tercer grado y está integrado por 20 alumnos, de los cuáles el colegio al escuchar los objetivos de la investigación decidió seleccionar a 9 alumnos. De acuerdo con los comentarios de la maestra, se trató de los alumnos que tienen mejor desempeño en matemáticas y un alumno que tiene problemas significativos en las matemáticas (conteo, multiplicaciones, restas, solución de problemas) (caso por conveniencia para la escuela). Nosotros hemos estado de acuerdo con la propuesta y la elección que realizó la maestra de sus alumnos para incluirlos en la investigación.

El colegio Montessori tiene una organización de grupos escolares diferentes a los colegios Kepler y colegio por competencias. Los grupos se llaman talleres, en esta escuela primaria hay dos talleres. Taller 1 está integrado por alumnos de primer a tercer grado, y taller 2 incluye a los alumnos de cuarto a sexto grado. Además, las aulas escolares se conocen como ambientes. Todos los alumnos se encuentran en un salón amplio.

### **Participantes**

En esta investigación trabajamos con tres maestras de tres colegios privados y con sus alumnos correspondientes. Las maestras basan su enseñanza en: 1) la teoría de la actividad (Colegio Kepler), 2) programa SEP (competencias) y 3) en modelo constructivista (Colegio Montessori).

Hemos incluido a tres maestras de tercer grado de primaria, de escuelas privadas, ubicadas en la ciudad de Puebla y en la ciudad de México. También han participado los alumnos de las maestras correspondientes, fueron grupos naturales, correspondientes al tercer grado de primaria en cada colegio. Debido a que un colegio (Colegio Kepler) cuenta con pocos alumnos (7 alumnos), a partir de este consideramos el número de alumnos, como máximo 10 alumnos. Este Colegio es fundamental en la investigación porque es el único identificado que basa su enseñanza en la teoría de la actividad. Además de que empíricamente consideramos que su exclusión llevaría al debate de que si existe algún colegio que aplique las premisas utilizadas para la construcción del concepto de método de enseñanza.

A continuación mostramos los datos generales de la maestra y el grupo escolar del tercer grado de primaria del Colegio Kepler (Tabla 5).

Tabla 5. Datos generales de la maestra del Colegio Kepler.

<b>Edad</b>	41 años	<b>Grados en los que ha enseñado</b>	Kínder 2 y 3, un año; 1, 2, 4, 6 de primaria, un año; 3 grado 5 años.
<b>Grado que enseña</b>	3º de primaria	<b>Grado académico</b>	Lic. en Educación media en área de pedagogía
<b>Años de docencia</b>	13	<b>Últimos cursos de profesionalización</b>	Dibujo, cuento, concepto de número
<b>Número de colegios, en los que ha trabajado</b>	2	<b>Tipo de Colegio</b>	Privados

En la tabla 6 se muestran las características del grupo de tercer grado del Colegio Kepler.

Tabla 6. Datos generales de los alumnos del Colegio Kepler

Alumno	Edad	Sexo	Grados cursados en el colegio	Observaciones
1	9	Niño	2 años	
2	9	Niño	3 años	
3	9	Niña	4 años	
4	9	Niño	3 años	Diagnóstico de Síndrome de Williams/ intervención neuropsicológica
5	8	Niño	5 años	
6	9	Niño	5 años	
7	9	Niño	6 años	

En relación con el segundo colegio, se describen en las siguiente tabla (7) los datos generales de la maestra del colegio que basa su enseñanza en el programa de competencias (SEP, 2011).

Tabla 7. Datos generales de la maestra del Colegio por competencias.

<b>Edad</b>	43 años	<b>Grados en los que ha enseñado</b>	3º y 4º
<b>Grado que enseña</b>	3º de primaria	<b>Grado académico</b>	Lic. en Educación
<b>Años de docencia</b>	6 años	<b>Últimos cursos de profesionalización</b>	Certificación “Conocer”
<b>Número de colegios, en los que ha trabajado</b>	2	<b>Tipo de Colegio</b>	Privado

Las características de los alumnos del tercer grado de primaria se muestran en la siguiente tabla (8). El grupo está conformado por 20 alumnos, aunque se propuso trabajar con todo el grupo y seleccionar de forma intencional a diez alumnos para evitar el sesgo de información, el colegio optó por elegir 8 alumnos, es posible que sus criterios de selección hayan sido considerar a los alumnos que tienen mejor rendimiento académico. Además, a petición de la maestra de grupo se integró un alumno más que tiene dificultades académicas, para que le comentáramos cómo podía trabajar con él.

Tabla 8. Características de los alumnos del Colegio por competencias

Alumno	Edad	Sexo	Grados cursados en el colegio	Observaciones
1	8	Niña	3 años	
2	8	Niña	5 años	
3	8	Niña	2 años	
4	9	Niño	4 años	
5	9	Niña	4 años	
6	9	Niña	Desde maternal	
7	8	Niña	4 años	
8	9	Niña	3 años	
9	9	Niño	3 años	Dificultades de aprendizaje

Finalmente, en las siguientes tablas (9 y 10) están descritos los datos de las maestras del colegio Montessori. La participación de ambas maestras fue importante porque ellas eligieron participar y ambas intervienen en la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 9. Datos generales de la maestra de matemáticas del Colegio Montessori.

<b>Edad</b>	38 años	<b>Grados en los que ha enseñado</b>	Taller 1 y 2
<b>Grado que enseña</b>	Taller 1 y taller 2	<b>Grado académico</b>	Licenciada en Pedagogía
<b>Años de docencia</b>	16 años	<b>Últimos cursos de profesionalización</b>	Método bancubi
<b>Número de colegios, en los que ha trabajado</b>	1	<b>Tipo de Colegio</b>	Privado

Tabla 10. Datos generales de la maestra titular del Colegio Montessori

<b>Edad</b>	43 años	<b>Grados en los que ha enseñado</b>	Taller 1 y 2
<b>Grado que enseña</b>	Taller 1 y 2	<b>Grado académico</b>	Maestría en Arquitectura
<b>Años de docencia</b>	5 años	<b>Últimos cursos de profesionalización</b>	Método bancubi
<b>Número de colegios, en los que ha trabajado</b>	1	<b>Tipo de Colegio</b>	Privado

En la tabla (11) son presentados los datos de los alumnos que participaron en nuestra investigación, estos alumnos son los únicos que cursan tercer grado de primaria.

Tabla 11. Datos generales de los alumnos del colegio Montessori.

Alumno	Edad	Sexo	Años en el colegio	Observaciones
1	9	Niña	6 años	La maestra reportó inmadurez
2	8	Niño	3 años	

Alumno	Edad	Sexo	Años en el colegio	Observaciones
3	8	Niño	6 años	
4	8	Niño	1 año	
5	9	Niña	6 años	
6	9	Niña	3 años	

#### 4.4 Instrumentos

Los instrumentos que utilizamos fueron; la entrevista semi-estructurada, el protocolo de evaluación de conceptos matemáticos para alumnos, y la hoja de registro de la observación de clases. Los instrumentos fueron diseñados a partir de la teoría de la actividad y de las investigaciones en el área de la enseñanza de las matemáticas desde el mismo enfoque. Se detalla su elaboración en el apartado del procedimiento, mientras tanto estos instrumentos son descritos a continuación:

1) Entrevista semi-estructurada a profesores (anexo 1). La entrevista fue diseñada a partir de constructos teóricos. Las categorías que se incluyeron fueron:

- a. Datos sociodemográficos (edad, años de docencia, número y tipo de colegios anteriores, grado académico, grado en los que ha enseñado).
- b. Conocimiento de la asignatura (concepto de matemáticas, conceptos necesarios para la enseñanza de las matemáticas).
- c. Sistematización del contenido (estrategias, tareas, elección del método).
- d. Orientación de enseñanza (uso de materiales, instrucciones y explicaciones).
- e. Logros (aprendizaje de los conceptos matemáticos).
- f. Autoevaluación (resultados del programa de enseñanza, propuestas, obstáculos).

El análisis que predominó fue el descriptivo, debido a que se pretendía especificar las características de los métodos de enseñanza (Campos, 2009).

2) Protocolo de evaluación de habilidades matemáticas (anexo 2)

Las tareas de evaluación fueron aplicadas a los alumnos de forma individual, debido a que se pretendió identificar el desarrollo de los conceptos y solución de problemas de los alumnos. La evaluación se realizó a través de un proceso interventivo (dinámico) propuesto por Vygotsky y sus seguidores (Vygotsky, 1995; Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010; Lázaro, Solovieva y Quintanar, 2013; Solovieva, Lázaro, Rosas, Quintanar, Escotto y Sánchez, 2014; González, 2016). Dicha forma de evaluación presupone procedimientos e interacciones flexibles durante sesiones, se toman en cuenta y se registran no solo las respuestas, sino también los tipos de errores, actitudes, solicitudes de ayuda por parte de los niños, así como sus necesidades, expresiones emocionales y verbales. Además, el tipo de ayuda fue brindado por el evaluador, siempre y cuando el niño no lograra solucionar el problema y contestar a la pregunta por su propia cuenta. Durante la evaluación fueron utilizados diversos tipos de ayudas, considerando el trabajo de Solovieva (2004): 1) nivel verbal (explicación matemática-lógica-simbólica, repetición de instrucción, preguntas dirigidas, uso de conceptos, animación, escritura de números y algoritmo), 2) nivel perceptivo (uso del dibujo concreto-palitos de conteo, esquemas) y 3) nivel material (uso de palitos de conteo).

Para valorar los conceptos matemáticos que han aprendido los alumnos fueron organizadas preguntas que incluían acciones de identificación, comparación y conversión de medidas, así también se identificaron tareas que implicaban la solución de operaciones y problemas matemáticos (Rosas, 2013; Rosas, Solovieva y Quintanar, 2017). Las categorías que se incluyeron en el protocolo de evaluación fueron:

- a) Datos generales (edad, grado, historia académica en primaria).
- b) Concepto de número y sistema numérico.
- c) Operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división de números enteros, decimales y fracciones).
- d) Solución de problemas aritméticos (simples y complejos-dos operaciones).
- e) Actitud hacia las matemáticas.

El análisis realizado fue cualitativo de los parámetros procesuales antes mencionados, tales como: necesidades de ayuda, tipos de ayuda (verbal, perceptiva o material) y tipos de errores.

### 3) Hoja de registro de observación de clases (anexo 3)

Una hoja de registro fue organizada para identificar los elementos del método de enseñanza durante las clases: tipo de orientación, acciones que incluye, plano de ejecución de las actividades, evaluación de las tareas, organización de las participaciones, tipos de ayuda.

4) Cuadernos y ejercicios de los alumnos, con el objetivo de observar las actividades que utiliza el maestro para enseñar los conceptos matemáticos.

## 4.5 Procedimiento

A partir del diseño de investigación organizamos las siguientes fases (ver tabla 12):

Tabla 12. Fases de la aplicación de la investigación.

Fase	Objetivo
1. Diseño de instrumentos	Organizar los elementos del método de enseñanza en los instrumentos de: hoja de observación de clase, entrevista a docentes y evaluación a alumnos.
2. Elección y reunión con participantes	Buscar tres colegios que tengan programas de enseñanza diferentes (SEP, Montessori, Teoría de la actividad aplicada a la enseñanza). Brindar objetivos de la investigación, acordar fechas y dinámica de aplicación de los instrumentos. Así como los beneficios que obtendrán por participar en la investigación.
3. Observación de clase	Identificar los elementos del método de enseñanza (tipo de conceptos, acciones, orientaciones, colaboración) que utilizan las maestras para enseñar matemáticas en el aula.
4. Entrevista a docentes	Identificar los elementos del método de enseñanza (tipo de conceptos, acciones, orientaciones, colaboración) que la maestra conoce, específicamente el conocimiento de los conceptos matemáticos, la solución de problemas matemáticos y su forma de enseñarlos en la educación básica.
5. Evaluación a alumnos	Identificar el desarrollo de los conceptos de número y sistema numérico decimal de los alumnos, mediante la solución de algoritmos y problemas matemáticos. Así como su percepción de la enseñanza de las matemáticas que utiliza su maestra.

Fase	Objetivo
6. Retroalimentación	Compartir los resultados de la investigación con la directora, maestras y alumnos, para aportar a su labor como maestras y a los alumnos identificar cómo pueden mejorar su aprendizaje.

**Fase 1.** Diseño de instrumentos: entrevista semi-estructurada para el docente y del protocolo de evaluación de conceptos matemáticos. Como hemos mencionado, para obtener la información suficiente y necesaria en esta investigación fueron seleccionados: 1) una observación de las clases para identificar la forma de enseñar los contenidos matemáticos, 2) la entrevista semi-estructurada para maestras que nos permitió identificar su conocimiento sobre la asignatura de las matemáticas y la forma en que planea enseñarlos, y 3) el protocolo de evaluación para los alumnos que nos permitió conocer el desarrollo de los conceptos y de las habilidades matemáticas.

En seguida describimos el contenido de la entrevista y del protocolo.

La entrevista para maestros y el protocolo de evaluación de conceptos matemáticos para alumnos fueron diseñados a partir del análisis de los elementos del método de enseñanza, de los conceptos de número y sistema numérico decimal, así como ejercicios y problemas elaborados en las investigaciones de Talizina (2009), Zárraga (2011) y Rosas (2012). Las tareas de evaluación para los alumnos incluyeron problemas simples (una operación aritmética), problemas complejos (dos operaciones aritméticas), operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división). Los problemas aritméticos se plantearon en las siguientes formas: elaborados por el investigador (simples y complejos), elaboración de problemas a partir de datos, por último elaboración de sus propios problemas.

La selección de las preguntas para docentes fueron organizadas de acuerdo con las características esenciales del concepto de método de enseñanza que hemos construido a partir de las investigaciones de los seguidores de la teoría de la actividad (Galperin, 2001; Talizina, 2009; Solovieva, 2013).

En la siguiente tabla (13) mostramos las categorías y forma de evaluación de la entrevista semi-estructurada para docentes:

Tabla 13. Entrevista semi-estructurada para docentes

Categoría	Indicador	Reactivo
Concepción de las matemáticas	Concepto de matemáticas	Para usted ¿Qué son las matemáticas?
	Conceptos que deban enseñarse en la primaria	¿Qué contenidos matemáticos considera que se enseñan en la primaria? ¿Por qué? ¿Qué contenidos matemáticos le exige enseñar la Institución?
	Actividades para enseñar los conceptos	¿Cómo cree que se enseñan esos contenidos? ¿Usted cómo enseña las matemáticas? ¿Qué actividades utiliza para enseñar los contenidos de matemáticas? ¿Cómo elige las actividades para enseñar los contenidos de matemáticas? (considera la edad, el grado de complejidad, variedad) ¿Dónde ha aprendido esas actividades?
	Dificultades en la enseñanza de las matemáticas	¿Cuáles son las principales dificultades de los alumnos para realizar estas actividades?
Sistematización del contenido	Tipo de método de enseñanza	¿Usted utiliza algún programa, método, estrategias o forma particular para enseñar? ¿En qué consiste? (tareas, estrategias, desarrollo de motivación)
	Objetivos del método	¿Este programa, método, estrategias qué objetivos tienen? (formación de conceptos, habilidades matemáticas, mecanización de habilidades)
	Tiempo de trabajo con el método	¿Desde cuándo aplica este programa, métodos o estrategias? ¿Dónde aprendió a utilizarlos?
	Elección del método	¿Lo eligió usted o es requisito del colegio?
Orientación	Uso de materiales para la enseñanza	¿Utiliza algunos materiales para enseñar los contenidos matemáticos? ¿Cómo utiliza esos materiales?
	Tipo de instrucción	¿Cómo son las indicaciones que da a los niños? ¿Cuándo los alumnos tienen dudas? ¿Cómo resuelve esas dudas?

Categoría	Indicador	Reactivo
	Trabajo individual o grupal	¿Considera relevante las actividades grupales para el aprendizaje de las matemáticas? ¿Por qué? ¿En su enseñanza prevalece el trabajo colectivo o el trabajo individual?
Logro de acciones	Verificación de las acciones	¿Cómo verifica que los alumnos logren las tareas matemáticas?
	Evaluación del aprendizaje	¿Qué tareas utiliza para evaluar el aprendizaje de las matemáticas?
	Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	¿Qué contenidos matemáticos considera que son más difíciles de aprender para los alumnos? ¿Por qué? ¿Qué contenidos matemáticos considera más fáciles de aprender para los alumnos? ¿Por qué?
Conceptos matemáticos	Selección de conceptos	¿Usted considera que existan conceptos matemáticos que deban enseñarse en la escuela primaria? ¿Cuáles conceptos deberían formarse?
	Concepto de número	¿Cuál es el concepto de número?
	Formación de conceptos	¿Usted forma conceptos matemáticos? ¿Cuáles conceptos? ¿Cómo los forma? ¿Cuáles considera que son los conceptos más difíciles de aprender para los alumnos? ¿Desde qué grado considera que deben formarse los conceptos matemáticos? ¿Qué actividades considera que son útiles para la formación de conceptos? ¿Cuáles las menor útiles?
Solución de problemas	Acciones para la solución de problemas	¿Considera necesario la tarea de solución de problemas para la enseñanza de las matemáticas en la primaria? ¿Qué implica la solución de problemas?
	Enseñanza de la solución de problemas	¿Qué actividades utiliza para enseñar la solución de problemas? ¿Cuáles son las dificultades que tienen los alumnos para solucionar problemas? ¿Qué actividades considera que facilitan la solución de problemas?

Categoría	Indicador	Reactivo
	Tipos de problemas	¿Qué tipos de problemas solucionan sus alumnos?
Profesionalización del docente	Actualización	¿Usted cree que necesita alguna actualización o formación para mejorar o modificar su forma o método de enseñanza de matemáticas?
	Formación	¿Podría identificar alguna teoría que respalde su forma de enseñar? ¿Le gustaría modificar algo en su forma de enseñar? ¿Las tareas que usted utiliza para formar los contenidos impactan en alguna otra materia o en la vida del alumno?

En relación con el protocolo de evaluación de conceptos matemáticos, a partir de trabajos previos (Nikola y Talizina, 2017; Zárraga, 2011; Rosas, 2012) logramos identificar tareas que son sensibles para valorar los conceptos matemáticos y la solución de problemas. En la selección de tareas se considera el concepto de número establecido por Davíдов (1988), Galperin (2001) y Talizina (2009), en el cual se identifican las siguientes características del número: magnitud y medida. La acción fundamental para formar el concepto de número es la acción de medición. A partir de la acción de medición es posible formar los sistemas de medición, los cuales implican en uso de una medida. Posterior a la inclusión del sistema numérico decimal se desarrollan las acciones aritméticas.

Las tareas que proponen los estudios de Ortiz (2007), Rosas y Rosas (2010), Zárraga (2011), Rosas (2012) y Rosas, Solovieva y Quintanar (2014) consideran las características mencionadas.

En la selección de problemas aritméticos consideramos la estructura psicológica de la actividad intelectual (Tsvetkova, 1999). Dicha estructura incluye los eslabones de la actividad orientativo-investigativa, análisis de las relaciones lógico gramaticales, creación de estrategia de solución, verificación del resultado, entre otros. Los tipos de problemas fueron considerados a partir del grado de complejidad identificado por Luria y Tsvetkova (1987). De acuerdo con estos autores, existen ocho tipos de problemas aritméticos. En nuestra investigación solo se utiliza el tipo simple directo y

el complejo directo. Los problemas simples implican que para lograr su solución se debe realizar una acción (operación aritmética) y los datos son dados de forma directa, las formulas establecidas son:  $a + b = x$ ;  $a - b = x$ ;  $a * b = x$ ;  $a / b = x$ . Los problemas complejos implican dos acciones (operaciones aritméticas) y los datos no son dados de forma directa, es decir, el alumno debe realizar una acción previa a la elección de operación aritmética para lograr su solución, las formulas establecidas son:  $a + (a + b) = x$ ;  $a (a - b) = x$ ;  $a + ab = x$ .

Otro factor que consideramos fueron las habilidades generales que los alumnos requieren para solucionar los problemas aritméticos, por lo que se revisó el método de formación propuesto por Nikola y Talizina (2017). Los autores han identificado que se requiere que el alumno identifique de forma reflexiva la pregunta del problema y de las condiciones, ante las cuales dicha pregunta se establece. Las condiciones del problema siempre describen una u otra situación, detrás de las cuales el alumno debe descubrir las relaciones aritméticas determinadas, es decir, debe describir la situación que se menciona en el idioma de las matemáticas.

Finalmente autores como Tsvetkova (1999) refieren la importancia de que los alumnos diseñen sus propios problemas para lo cual establecimos las opciones: 1) creación de problemas a partir de datos dados por el evaluador, y 2) creación de problemas de forma libre.

Algunas tareas de solución de problemas en población mexicana también han sido abordadas en las investigaciones de Rosas y Rosas (2010) y Rosas (2012).

A continuación en la tabla (14) mostramos las tareas que se incluyeron en el protocolo de evaluación para conocer los resultados que obtienen los maestros posterior a aplicar su método de enseñanza.

Tabla 14. Evaluación de conceptos matemáticos para alumnos

Categoría	Indicador	Reactivo	Análisis de datos
Concepto de número	Magnitud	¿Qué es un número? ¿Para qué sirven los números? ¿Qué números conoces?	Categorías
	Medida	¿Qué es el sistema numérico decimal? ¿Qué es la unidad? ¿Qué es la decena? ¿Qué es la centena?	

Categoría	Indicador	Reactivo	Análisis de datos
	Sistema numérico	<p>En el número 182, ¿qué dígito es menor?</p> <p>En el número 15974, ¿qué dígito es mayor? ¿Cuál es menor? ¿Por qué?</p> <p>Si fuera el sistema de 3, ¿cuántas unidades y cuántas decenas tuviera el número 13 (se puede dar apoyo de cerillos)?</p> <p>¿Cuántos gramos hay en 3 kg? ¿Cuántos kg en 300 gr?</p> <p>¿Qué pesa más 100 gr de algodón o 100 gr de acero? ¿La cantidad de algodón y acero sería la misma? ¿Por qué?</p> <p>¿Qué pesa más un litro de leche o un litro de crema? ¿La cantidad de leche y crema sería la misma? ¿Por qué?</p>	<p>Tipos de errores</p> <p>Tipos de ayuda (lógico-verbal; perceptivo y material)</p>
Operaciones aritméticas	<p>Identificación del número y símbolos matemáticos</p> <p>Identificación del valor posicional del dígito</p> <p>Identificación de las relaciones entre los números.</p> <p>Ejecución de los algoritmos formales.</p>	<p><math>57-19=</math></p> <p><math>115+23=</math></p> <p><math>15 \times 4=</math></p> <p><math>102 \times 73=</math></p> <p><math>\frac{1}{4} + \frac{3}{8}=</math></p> <p><math>360/6=</math></p> <p><math>42/7=</math></p> <p><math>2.54 + 45.019</math></p> <p><math>501-49=</math></p>	<p>Tipos de errores</p> <p>Tipos de ayuda (lógico-verbal; perceptivo y material)</p>
Solución de problemas	<p>Identificación de la pregunta final</p> <p>Identificación de los nexos lógico</p>	<p>Renata y Daniel fueron al mercado y compraron lo siguiente: 2 kilos de manzana, 300 gramos de azúcar y 1 kilo de pasta, ¿cuántos gramos compraron en total?</p> <p>Un tren avanzó 98 km durante 8 horas. ¿Cuántos kilómetros hace el tren en una hora?</p>	<p>Tipos de errores</p> <p>Tipos de ayuda</p>

Categoría	Indicador	Reactivo	Análisis de datos
	gramaticales de los datos	Durante 12 días se construyó una carretera de 48 kilómetros, ¿cuántos carros pasaron durante un día?	(lógico-verbal; perceptivo y material)
	Identificación de la operación	La biblioteca "El Principito" tiene 40 libros repartidos en 5 estantes. Si la Maestra Lupita coloca la misma cantidad de libros en cada estante, ¿cuántos libros hay cada estante?	
	Ejecución del algoritmo	Gaby tiene tres veces más la edad de su hermana Sofía. Si Sofía tiene 7 años, ¿cuántos años tiene Gaby?	
	Solución del problema	En el Museo del Niño la primera sala tiene 64 actividades lúdicas y en la segunda hay 4 veces menos. ¿Cuántas actividades lúdicas hay en la segunda sala?	
		Axel y Daniel jugaron tres rondas de penales. Si en la primera ronda quedaron 20 a 18 goles, en la segunda 35 a 20 y en la última 15 a 50, ¿quién ganó? ¿Por cuántos goles?	
		En una caja había 19 bombones. Se comieron una parte de los bombones. Quedaron 11 bombones. ¿Cuántos bombones se comieron?	
		Redacta un problema con los siguientes datos: 59 minutos, 3 metros.	
		Inventa un problema y solúcnalo. Inventa un problema para tu compañero.	

## Fase 2. Elección de participantes

La participación de las escuelas fue elegida a partir de que tuvieran un programa de enseñanza identificado y declarado por ellos mismos. Identificamos un colegio que basa su enseñanza en la teoría de la actividad, un colegio que basa su enseñanza

en el programa de SEP (competencias) y un Colegio que basa su enseñanza en el modelo Montessori.

Una vez que identificamos los colegios, se concretaba una cita con el director del colegio para presentarle el proyecto de investigación y establecer acuerdos de participación. Posteriormente, establecimos las fechas para entregar algún documento (carta de consentimiento, resumen del proyecto de investigación), la observación de clase, la aplicación de la entrevista con la maestra y del protocolo para los niños. Además, acordamos con el colegio en programar sesiones de entrega de resultados como aportación de su participación (fase de retroalimentación). Realizamos una sesión para maestros y otra para alumnos (grupo). En el colegio Kepler y SEP realizamos una plática con las maestras sobre la enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad. Con el Colegio Montessori solo se entregaron resultados a la coordinadora académica de tercer grado y a la maestra de matemáticas.

### **Fase 3.** Observación de clases y análisis de videograbación (algunas sesiones).

Una vez establecidas las fechas de trabajo, la primera tarea que realizamos fue la observación de clases. Esta observación fue sistematizada y no participante.

En el colegio Kepler y SEP colocamos una videograbadora en una esquina del salón que permitió visualizar a la maestra frente a sus alumnos y una grabadora de audio en el escritorio. La investigadora se sentó en la parte de atrás para realizar anotaciones en la hoja de registro (ver anexo 3), su visión fue completa del salón, de la maestra y de los alumnos.

Sin embargo, en el Colegio Montessori no permitieron la videograbación, por lo que el análisis de las sesiones escolares se realizó a partir de las notas y esquemas realizados por la investigadora, lo que llevo a escribir la mayor cantidad de frases mencionadas en las clases. Al terminar la clase, la investigadora se dedicaba a redactar las clases, de acuerdo con las notas realizadas. Fueron observadas dos clases de la maestra de matemáticas, quién solo asiste una vez a la semana, y una clase de la coordinadora de taller 1 quién asiste como apoyo para la maestra titular.

#### **Fase 4.** Aplicación de entrevista a docente.

Las entrevistas fueron aplicadas en el horario que establecieron las maestras. Solicitamos un salón con las condiciones necesarias para trabajar (iluminación, corriente eléctrica, mesa y sillas). Además, preguntamos a las maestras la posibilidad de grabar (audio). Las entrevistas tuvieron una duración de una hora aproximadamente. Sin embargo, en el colegio Montessori no hubo oportunidad de grabar, la entrevista duró 40 minutos por las actividades de las maestras.

#### **Fase 5.** Aplicación del protocolo de los alumnos.

Los protocolos de evaluación fueron aplicados de forma individual. En los colegios Kepler y SEP fue solicitado un salón con las condiciones necesarias para trabajar (iluminación, corriente eléctrica, mesa y sillas). Además, solicitamos la participación de los alumnos en horas de clase que no afectaran su aprendizaje, es decir, evitamos sacarlos de su salón cuando estuvieran aprendiendo un tema nuevo o de su interés. La evaluación tuvo una duración de 30 a 60 minutos aproximadamente y se realizaron pequeños descansos cuando observábamos a los alumnos cansados (por ejemplo, tomar agua). La evaluación fue dinámica por lo que proporcionamos apoyos cuando el alumno lo requirió, también registramos cuando el alumno hacía uso de estos apoyos por ellos mismos. Por ejemplo, existieron alumnos que utilizaron como apoyo la repetición activa de los ejercicios para identificar el contenido esencial o los datos necesarios. Los apoyos fueron: 1) lógico verbal, perceptivo y material. En la siguiente tabla (15) son descritos los tipos de apoyos.

Tabla 15. Tipos de apoyo durante la evaluación dinámica

Tipo de apoyo	Descripción	Ejemplo
Lógico verbal	a. Explicación del contenido matemático; lógico o simbólico. b. Preguntas dirigidas hacia la identificación del contenido matemático	“Recuerda que el número tiene siempre una medida, la cual determina su valor y cantidad, ¿en estos números qué medidas tienen? ¿Es posible comparar? ¿Por qué?”

Tipo de apoyo	Descripción	Ejemplo
	c. Repetición activa de la tarea	
Perceptivo	a. Concreto; dibujo concreto de palitos o bolitas para el conteo  esquemático; mostrar relaciones matemáticas mediante el dibujo	“el problema dice que un tren recorrió 98 k en 8 horas, aquí vamos a dibujar con una línea la trayectoria de ese tren, este tren ¿en cuántas horas recorrió 98 km?, en esta trayectoria están distribuidas las 8 horas, ahora hay que dividir en 8 partes y ¿la pregunta del problema es?”
Material	a. Uso de palitos o fichas de conteo  b. Uso de material didáctico específico en matemáticas	“Puedes usar el material bancubi para saber cuánto es $42/7$ ”

En el caso del colegio Montessori la evaluación la realizamos en el ambiente (aula escolar), en una mesa que estaba ubicada a la orilla y cerca de la puerta, mientras se realizaba la evaluación existían otras mesas de trabajo, presentaciones en el tapete, y algunos compañeros se acercaban a preguntar sobre las tareas, sin embargo, los alumnos se mantenían en las tareas y trabajaban de forma independiente. Además, el tiempo de evaluación fue de 40 minutos como máximo, debido a que la coordinadora del grupo nos señaló que los alumnos están acostumbrados a trabajar por periodos de 20 minutos.

#### **Fase 6.** Retroalimentación (entrega de resultados).

La última fase consistió en entregar resultados a las maestras y a los alumnos de los tres colegios, para lo cual organizamos dos sesiones respectivamente, todo esto

como aportación de la investigadora para el colegio, así como se había acordado en la primera reunión con las directoras de los colegios.

Dos actividades fueron establecidas y se describen a continuación:

- a) Entrega de resultados a alumnos; en esta sesión solo participaron los colegio Kepler y SEP y fue de forma grupal, en el caso del colegio por competencias trabajamos con 16 alumnos. La clase fue organizada a partir de las tareas del protocolo de evaluación: concepto de número, solución de operaciones y problemas matemáticos. La clase iniciaba con la pregunta sobre el concepto de número, después se daba la explicación, se solucionaban de forma conjunta ejercicios del protocolo y se daban otros con mayor grado de complejidad para que los alumnos aplicaran el conocimiento trabajado. Posteriormente, se solucionaban algunas operaciones aritméticas que implicaban conversión de medidas, explicando el procedimiento del algoritmo. Finalmente, la solución de problemas fue trabajada mediante una tarjeta de orientación que organizaba preguntas para identificar: la situación del problema, pregunta del problema, datos necesarios y conocidos, relación entre los datos, y respuesta a la pregunta del problema.
- b) Entrega de resultados a la maestra. La sesión con las maestras de los tres colegios tuvo una duración de 40 minutos y enfatizamos en recomendaciones para favorecer y consolidar los conceptos matemáticos, así mismo se mostró el video de tres minutos de su clase y solicitamos que comentaran qué estaba pasando en esa escena, cuál era el objetivo, si habían logrado su objetivo, cuál era su opinión. Esta tarea no fue posible realizar con el colegio Montessori porque no permitieron la videograbación.

Además entregamos un reporte del análisis de clases y entrevista a los colegios, así como algunas sugerencias. Estas se obtuvieron a partir del análisis de tipos de errores y de apoyo que fueron identificados en la evaluación. Algunas sugerencias fueron: reflexionar sobre los elementos de su método de enseñanza (sistema de conceptos), relacionarlos con las categorías teóricas que su perspectiva propone, algunas estrategias basadas en la teoría de la actividad, como la tarjeta de orientación de solución de problemas, esto ayudaba a tener una mejor organización. En relación con los

alumnos enfatizamos en responder a la pregunta final de los problemas y no solo la operación aritmética.

#### **4.6 Contexto**

Los criterios de delimitación del contexto fueron de institución, es decir, a partir de las características de los colegios, específicamente nos interesaron la forma de enseñanza que utilizan los docentes de cada colegio. A partir del análisis de la bibliografía y estado del arte fue identificado una forma propia de enseñanza de las matemáticas en los colegios que se basan en la perspectiva Montessori (constructivista) y un colegio que utiliza la teoría de la actividad, además se buscó un colegio que base su enseñanza en el programa SEP. Fue posible a partir de identificar esa forma específica de enseñanza relacionar con los elementos del método de enseñanza propuesto en esta investigación.

A continuación son descritos los colegios. Respetando la confidencialidad de cada colegio y de acuerdo con el anonimato acordado con los colegios, no serán mencionadas la dirección específica de cada colegio, se darán rasgos generales. Solo el colegio Kepler, quién usa la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza, autorizó a usar tanto el nombre del colegio como sus datos específicos.

A) Colegio basado en la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza (Colegio Kepler)

El colegio que utiliza la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza es el Colegio Kepler. Este colegio es pequeño y relativamente nuevo, cuenta con los seis grados de primaria y tres de preescolar. Permite y promueve la investigación educativa para diseñar su forma de enseñanza. A partir de sus características (número de alumnos del grupo) fueron seleccionados a los otros colegios, para evitar el sesgo de la información (diversidad de alumnos, control del grupo, entre otros). El colegio tiene un método de enseñanza de las matemáticas organizado de la siguiente forma:

1) A nivel preescolar se enseñan los componentes matemáticos establecidos por Salmina (2017). En México estos componentes han sido estudiados por Ortiz (2008) y Zarraga (2011): componente matemático (por ejemplo, correspondencia recíproca), componente espacial (identificación de características esenciales de los

objetos), componente simbólico (función simbólica) y componente lógico (conservación).

2) En la educación primaria se forman los conceptos matemáticos (concepto de número) y se trabaja con la solución de problemas.

El colegio tiene nueve salones para impartir clases, un salón de computación, una biblioteca, la oficina de la dirección y un patio pequeño.

#### B) Colegio basado en el programa SEP (competencias)

El segundo colegio, ubicado en la ciudad de México. Lo seleccionamos por tener las características siguientes: seguir el programa de la SEP como principal herramienta de enseñanza, contar con poca cantidad de alumnos en los grupos (solo hay un grupo de tercer grado de primaria igual que en el Colegio Kepler) y participar en proyectos de investigación. Este colegio está ubicado al sur de la ciudad de México. En una zona sub-urbana. La información del colegio se retoma de la entrevista con la directora.

El colegio tiene 30 años de experiencia en el ámbito escolar, “asentando sus bases en la última Reforma Educativa, con el objetivo de vincular los propósitos de la educación básica con la curricular interna... con el fin de desarrollar las cinco competencias para la vida, con base en: -Optimizar el uso y acceso de materiales didácticos y proyectos específicos, incluyendo los tecnológicos (TIC), - Dar un seguimiento en los resultados obtenidos en cuanto a la planeación evaluación en los tres niveles, - En preescolares implementar y desarrollar estrategias que impliquen un desafío a partir de las competencias que poseen, - En primaria y secundaria implementar y desarrollar estrategias meta cognitivas (aprender aprender), - Optimizar las áreas de oportunidad para el proceso de enseñanza aprendizaje”.

Este colegio además cuenta con cursos, talleres y actividades con los padres de familiar.

A nivel preescolar, esta escuela tiene como principal propósito “desarrollar habilidades que le permitan al preescolar ampliar y enriquecer sus experiencias de la

vida cotidiana, con el fin de resolver problemas y fortalecer su autonomía, creatividad y sobre todo propiciar un trabajo colaborativo y de sana convivencia”.

A nivel de primaria, como propósito se señala “fortalecer las competencias que permitan un trabajo por proyectos los cuales siempre tendrán como base el desarrollo de habilidades, académicas, de trabajo colaborativo y sobre todo la práctica de valores”. El colegio ofrece talleres de artes plásticas, ensamble instrumental y apoyo en tareas escolares.

A nivel de secundaria, se señala la necesidad de “desarrollar en los jóvenes una actitud positiva ante el trabajo colaborativo, la responsabilidad y sobre todo fortalecer su identidad y participación como individuo dentro de la familia, escuela y comunidad”.

#### C) Colegio Montessori, basado en premisas constructivistas

El colegio Montessori está ubicado en Puebla. Este colegio tiene como objetivo el desarrollo integral, creando un ambiente construir una personalidad saludable. Se imparten comunidad infantil, casa de los niños, taller 1, taller 2, taller 3 y taller 4.

El ambiente en taller 1 (alumnos de tercer grado) cuentan con una guía titular, una guía de inglés, quién todo el tiempo habla en inglés y los alumnos pueden responder en español o en actividades específicas se expresan en inglés. También, hay una maestra de matemáticas, quien asiste una vez a la semana y enseña mediante el material bancubi o Montessori.

En clases regulares tienen presentaciones para la enseñanza de las mismas, además de tener clases con el método bancubi y material Montessori. Las presentaciones académicas y el trabajo con el material bancubi se trabajan durante 20 minutos. En las clases de método bancubi primero son con taller 1 y después con taller 2.

La dinámica de las clases son las siguientes: entran, se saludan, la maestra toca la campana para anunciar a cada taller sus actividades, uno de ellos pasa al tapete para la presentación, mientras otro taller se reúne en una mesa y trabaja con una docente de inglés (quién habla inglés siempre). Las presentaciones tienen una

duración máxima de 20 minutos con la maestra titular y hasta 30 minutos con las maestras de apoyo en matemáticas (método bancubi o material bancubi). A las 11 de la mañana tienen una hora para comer, el salón cuenta con una pequeña cocina, se asigna a un chef y dos ayudantes para servir la comida, el resto ayuda a limpiar las mesas y llevar los platos, vasos y cucharas para comer. A las 12 tienen una hora para salir al patio y jugar. De 1 a 2 pm los niños realizan pendientes de trabajo.

También, para la enseñanza se utilizan libros de SEP pero no es lo principal, por ejemplo utilizan la parte de desafíos matemáticos. La evaluación de los alumnos es a partir de sus avances para realizar las tareas o asimilar los contenidos, los alumnos no hacen exámenes y no conocen sus calificaciones (los cuales son requisitos de SEP). Las maestras tienen un control por cada alumno, en el cual identifican el nivel de aprendizaje: con material, acompañamiento o listo para compartir.

Para mantener la confidencialidad de los datos fue acordado con los colegios mencionar la información necesaria y no referir ni el nombre del colegio ni la ubicación exacta de los mismos. Solo el colegio Kepler aceptó que fuera mostrado su nombre, por esta razón se ha incluido desde el inicio del trabajo. Aunque hemos decidido utilizar abreviación, quizá esto ayude a no predisponer a lector al nombre del colegio. El colegio que basa su enseñanza en la teoría de la actividad es denominado **colegio K**, el colegio que basa su enseñanza en el programa por competencias como **colegio S** y por último el colegio que basa su enseñanza en el modelo Montessori como el **colegio M**.

#### **4.7 Estrategia de análisis de datos**

Para dar respuesta a las preguntas de investigación utilizamos como estrategia el análisis cualitativo del contenido. Este análisis ha sido definido como un procedimiento para analizar el material textual, sin importar su procedencia. Se caracteriza por partir de modelos teóricos, por lo que usa categorías que son llevadas al material empírico y se evalúan repentinamente frente a este modelo teórico y se modifican si es necesario (Flick, 2007).

Algunos de los objetivos de esta estrategia se refieren a denotar tanto el contenido manifiesto como el contenido latente de los datos analizados (Bardin, 1996, citado en Cacéres, 2003), reelaborar los datos brutos ya sea agrupándolos en “clusters” o conjuntos homogéneos que agrupen material de similar sentido a través de pasos sucesivos hasta llegar a la conceptualización o regla descriptiva que justifique su agrupamiento (Miles y Huberman, 1994, en *íbid*), integrar los datos a interpretaciones o abstracciones de mayor nivel que permitan establecer relaciones e inferencias entre los diversos temas analizados y de éstos con la teoría previa (Mayaring, 2000, citado en *íbid*).

Nuestro objetivo fue establecer relaciones entre los elementos de nuestro objeto de estudio, los métodos de enseñanza, y los datos obtenidos por los instrumentos diseñados para conocer el proceso de enseñanza-aprendizaje que prevalece en tres colegios con distinto modelo.

El procedimiento para realizar este análisis es el siguiente, de acuerdo con Mayaring (1983, citado en Flick, 2007): 1) definir el material, seleccionar las partes del instrumentos que sean relevantes para responder la pregunta de investigación, 2) análisis de la situación de recogida de datos (¿cómo se generó el material? ¿Quién estuvo implicado? ¿Quién estuvo presente en esa situación? ¿de dónde proceden los documentos que hay que analizar?), 3) el material se caracteriza formalmente (¿cómo se documentó el material?), 4) dirección de análisis para el material seleccionado y lo que el investigador necesita interpretar de ellos, 6) se definen unidades analíticas, que pueden ser unidad de codificación (el elemento más pequeño de material que se puede analizar, la parte mínima del texto que puede entrar a una categoría), unidad contextual (cuál es el elemento más grande del texto que puede entrar en una categoría), y la unidad analítica (define qué pasajes se analizan uno después de otro).

Así fue propuesto el siguiente esquema para el análisis de datos, retomando el modelo de desarrollo de categorías deductivas de Mayaring (2000) (figura 1), debido a que el objeto de análisis se organizó a partir de la teoría elegida. No obstante, como lo refiere el modelo, esto no significa que se dejará el análisis de los propios datos para la formación de sentidos y categorías.

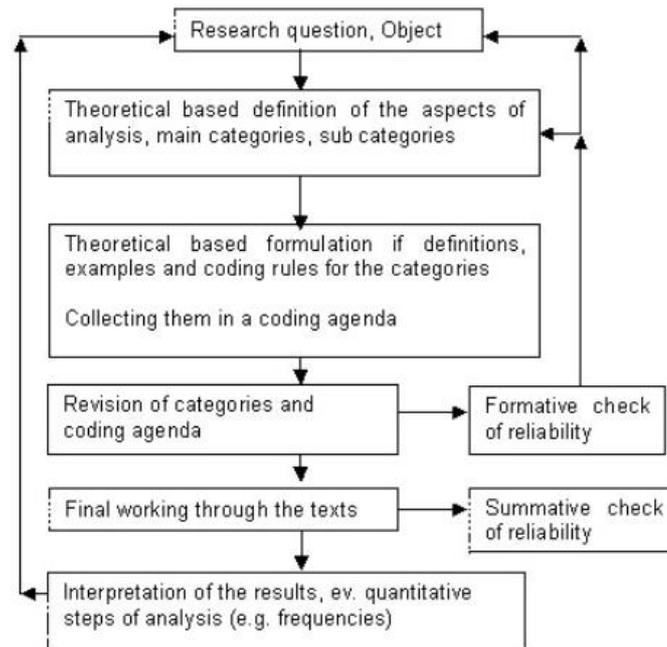


Figura 1. Modelo de pasos para la aplicación de categorías deductivas de Mayring (2000)

En relación con nuestro estudio se propone el siguiente contenido (figura 2)

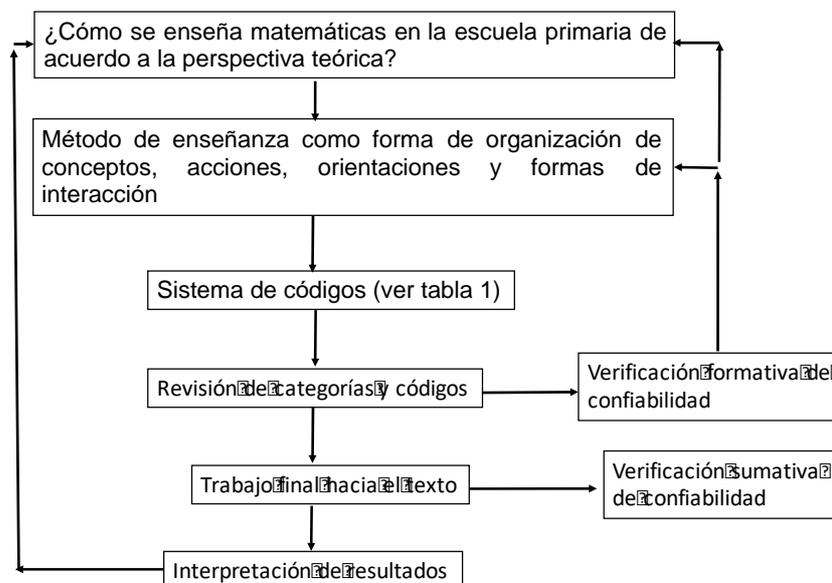


Figura 2. Modelo de análisis del método de enseñanza a partir del modelo de Mayring (2000)

En la siguiente tabla (16) se muestran los criterios de categorización, continuando con el modelo señalado, esta tabla es un ejemplo de cómo se realizó la codificación.

Tabla 16. Agenda de codificación del método de enseñanza.

Elementos	Subelementos	Ejemplos	Código
Sistema de conceptos	Científicos	Enseñanza de conceptos matemáticas "el concepto de número, que identifiquen las unidades, decenas, se deben dar orientaciones del uso de magnitud, medida y cantidad de veces, nivel de la acción realizada por el niño de acuerdo con la propuesta del maestro" (colegio K-entrevista)	Identificación de elementos principales del concepto de número (Concepto de número-CN)
	Empíricos	Enseñanza de operaciones aritméticas "conceptos de operaciones básicas, por ejemplo, la resta con conversión de medidas" (entrevista para maestras) (Colegio S)	Identificación del componente matemático sin conceptos (operativo) (componente matemático operativo-CMO)
	Materiales-	Uso de papeles para representar las fracciones (observación en clase) (colegio K)	Manipulación activa de objeto y con significado matemático (acción

Elementos	Subelementos	Ejemplos	Código
Sistema de acciones	materializadas	Uso de cubos para representar el valor de cada medida (observación de clase, evaluación de alumnos) (Colegio M)	materializada-AMz)
	Perceptivas	Uso del dibujo para representar un elemento de la fracción (colegio K) (observación de clase)	En los tres existen el uso de imágenes para realizar ejercicios matemáticos (acciones perceptivas – AP)
		Uso del dibujo para representar las medidas del sistema numérico decimal (colorear los cubos utilizados para formar cantidades) (colegio M) (observación de clase)	
		Uso de números impresos para realizar ejercicios de multiplicación (colegio S, observación de clase)	
	Verbales externas	Descripción- explicación del procedimiento frente al grupo (colegio K-observación de clase)	Existe la descripción verbal de los pasos realizados para solucionar un ejercicio (acciones verbales externas-AVex)
		Los alumnos ayudan a sus compañeros para realizar las tareas de matemáticas (observación de clase) (colegio M)	

Elementos	Subelementos	Ejemplos	Código
		La maestra pregunta ¿por qué dan ese resultado? Como medio de confirmación de resultados  (Colegio S-observación de clase)	Justificación de resultados operativos y lógicos (AV-corr)
	Verbales internas	Solución de operaciones matemáticas de forma mental (colegio S- evaluación de niños)	Los niños no escriben la operación solo dicen el resultado (AVint)
Tipo de orientación	Completa	Contiene los elementos suficiente para la solución individual “(colegio K, observación de clase)	Identificación de conceptos y sus relaciones (orientación completa-OC)
	Incompleta	Específica para cada tarea o es dada por contexto “pesa más o igual” dejando a un lado “pesa menos” (observación de clase, evaluación a niños)	Análisis de relaciones que no abarcan todas las posibilidades (orientación incompleta-OI)
	Generalizable	Uso de sistemas de conceptos, enseñanza de la fracción mediante el concepto de número y acción de medición (Colegio K-observación de clase)	Uso de sistemas de conceptos (orientación generazible-OG)

Elementos	Subelementos	Ejemplos	Código
	Concreta	Particular para cada tarea, solución de operaciones matemáticas (colegio S-observación grupo)	Solución de actividades aisladas (orientación concreta- OC)
	Independiente	Trabajo individual de cada ejercicio, preguntas específicas sobre contenido matemático (observación de clase, colegio K)	Uso de características del concepto de número para identificar las relaciones y solucionar.
	Dependiente	Requieren de las preguntas de la maestra para la verificación y solución de problemas “recuerden que sopesar es cuando tenemos dos objetos y...” (Colegio S-observación de clase)	Uso de frases incompletas, preguntas que incitan a la respuesta por ensayo y error (Orientación dependiente- OD)
Formas de interacción	Maestro- alumno	Explicación del tema, retoma conceptos cuando hay dudas (colegio K-observación clase)	Ambas maestras se relacionan de forma activa con los alumnos, la mayor parte de la clase están en interacción con ellos (interacción maestro-alumno I-MA)
		Explicación del tema, preguntas que inducen la respuesta, estimación de resultados, mayor participación de los niños en hábitos (repartir los libros, pasar el material) (colegio S-observación clase)	

Elementos	Subelementos	Ejemplos	Código
		Explicación del tema, preguntas sobre la observación de modelos presentados, construcción de conocimiento, afectiva (observación de clase, entrevista a maestras) (colegio M)	
	Alumno- alumno	Las tareas que realizan suelen ser individuales y por parejas, los alumnos explican a sus compañeros la forma de solución: La niña le indica a su compañero “primero, lee el enunciado”, “¿cuántas unidades te dice, o cuartos u octavos?”, “ahora ponlos” “fíjate en el pizarrón (y señala)” “¿cuántos cuartos hay en una unidad” (Colegio K, observación de grupo)	Los alumnos interactúan en relación con la solución de problemas matemáticos (Alumnos, activa-Aact)
		Las tareas en su mayoría son individuales, los alumnos no revisan sus respuestas, su ayuda consiste en decir las respuestas (observación de grupo) (colegio S)	Los alumnos solo se hablan para comentar contenido no relacionado a la clase (Alumnos, pasiva, Apasi)

Elementos	Subelementos	Ejemplos	Código
	Alumno-objeto	Forma activa con el objeto, realizan acciones de acuerdo con el contenido de clase, uso de hojas para formar fracciones (observación de clase-colegio K)	Los alumnos utilizan el objeto para solucionar su tarea (alumno objeto activa-AOact)
		Forma activa del objeto, realizan acciones de acuerdo con el contenido de acciones y a la curiosidad (observación de clase-Colegio M)	

A partir del ejemplo anterior realizamos un análisis de los resultados obtenidos por medio de los instrumentos en cada colegio. Dicho análisis consistió en describir y categorizar los datos por cada colegio. El desglose de estos datos los exponemos en el Anexo 4, solo como modelo muestra elegimos un colegio. Posterior a este desglose, para evitar la comparación directa de colegios, proseguimos a organizar los resultados de acuerdo a los elementos del contenido del concepto del método de enseñanza.

## 5. Resultados

Considerando el objetivo de analizar los métodos de enseñanza de las matemáticas en colegios con diferentes enfoques y formas de enseñanza, decidimos organizar los datos de acuerdo con los elementos del objeto de estudio: método de enseñanza. Los resultados implican describir el proceso y contenido de enseñanza de las maestras, su interacción con los alumnos y el proceso de solución que dieron los alumnos a las tareas matemáticas solicitadas en la evaluación dinámica individual. Sin embargo, el análisis de los métodos de enseñanza también implica la comparación de los elementos de su contenido y su caracterización en cada colegio. Lo anterior forma una parte de la producción y construcción de conocimiento. El interés del trabajo consiste en aportar en la organización de proceso de enseñanza-aprendizaje que posibilite y favorezca (u obstaculice) el desarrollo de conceptos matemáticos de los alumnos.

El colegio que basa su enseñanza en el enfoque que se incluye en el programa de la Secretaría de Educación Pública (SEP) es mencionado como *Colegio S*, el colegio que basa su enseñanza en el enfoque Montessori es referido como *Colegio M*, y por último, el colegio que basa su enseñanza en la teoría de la actividad es el colegio Kepler, el cual es referido por *Colegio K*. También es importante mencionar que las maestras identificaron un enfoque en el que basan su forma de enseñar. La maestra del colegio Montessori declaró abiertamente que su forma de enseñar se basa no en un método sino en la filosofía Montessori, mientras la maestra del colegio S mencionó que su principal herramienta es el programa SEP. Por último, la maestra del Colegio Kepler refirió que su enseñanza se basa principalmente en el enfoque de Vygotsky.

A continuación desplegamos la forma de enseñanza de los colegios para contribuir al desarrollo de herramientas teórico-metodológicas que permita orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje que los maestros dirigen.

### 5.1 Elementos del método de enseñanza por cada colegio

Los resultados son presentados a partir de los elementos del método de enseñanza propuestos en el marco teórico, en el siguiente orden: 1) sistema de conceptos

matemáticos, 2) tipos de orientación, 3) tipos de acciones, 4) tipos de interacción y 5) desarrollo conceptual de los alumnos.

### **1) Sistema de conceptos matemáticos**

Para este primer elemento relacionamos, en primer lugar, las ideas que las maestras expresaron durante las entrevistas, debido que para la enseñanza de un concepto es necesario identificar sus características esenciales. En segundo lugar, la formación de los conceptos matemáticos que utilizan las maestras los obtuvimos a partir de las observaciones de clase.

#### Colegio S

En el caso del colegio S. Durante la entrevista, la maestra comentaba que la enseñanza de las matemáticas está relacionada con “el mundo de los números”, el concepto de número es “una cifra, que encontramos en el universo y es infinito”, así las matemáticas tienen como principal objetivo la enseñanza de “las cuatro operaciones matemáticas” para lograr este objetivo es importante “realizar ejercicios constantes, trabajos en el cuaderno con el concepto principal, hacer ejercicios con material concreto y con otras formas”. La maestra especifica que los conceptos que se enseñan son “las operaciones aritméticas”, también refiere “por ejemplo, el de resta con conversión de medidas, así mismo en la división se requiere de la resta y si los alumnos no la aprenden bien entonces tendrán dificultades para aprender la división”.

Durante las observaciones de clase nos fue posible identificar que en este colegio no se trabaja con conceptos, aunque sí con definiciones. Por ejemplo, en el cuaderno de un alumno pudimos extraer la siguiente definición “división es una operación aritmética que consiste en averiguar cuántas veces un número está contenido en otro”. Esta definición limita identificar las características del concepto de número, es un producto que no contiene acciones que el alumno pueda realizar en el plano concreto o mental. En una clase, la maestra enseñaba las fracciones mediante la identificación de diversas medidas en el plano perceptivo, enfatizando en “pedacitos” y operaciones (la mitad de 8 es 4, un cuarto de 16 es 4). Los alumnos podían contestar verbalmente, aunque al dibujar un ejemplo solicitado, se confundían entre el número y la medida solicitada (un medio, un cuarto).

El siguiente ejercicio consistía en completar enteros. En el libro se indicaba una fracción y los alumnos tenían que dibujar y escribir la fracción que faltaba para completar un entero. La maestra, al resolver y verificar las respuestas de los alumnos, refería “para que llegue al entero, si tienen un tercio, ¿cuántos faltan? Dos, tienen que haber tres rectángulos” la forma de corrección de los errores “no estamos explicando eso, para que llegue a la unidad completa, ¿cuántos te faltan aquí para obtener tres tercios?”

La tarea posterior consistió en suma de fracciones, en la cual la maestra utiliza la siguiente explicación “si compré tres cuartos de sal y tres cuartos de azúcar, ¿cuánto pesan en total?, tres cuartos más tres cuartos (anota en el pizarrón) se suma, sabemos que es el mismo común denominador, tres más tres igual a seis cuartos”.

En los ejemplos anteriores es posible identificar solo el manejo operativo de las matemáticas; el conocimiento es adquirido a partir de la solución de ejercicios que requiere de las operaciones matemáticas sin reflexionar sobre su contenido lógico o simbólico. Este manejo operativo conlleva a la escritura de cifras que tienen una relación directa en asociación con el signo matemático, sin embargo, las múltiples relaciones que surgen entre las características del concepto de número y la posibilidad de crear nuevas relaciones quedan fuera de las explicaciones de la maestra. El número es dado como un producto, estático, aislado y enfatizando solo en su aspecto externo (operativo). A partir de esto los alumnos reproducen el conocimiento matemático, teniendo una solución principal de estimación de resultados sin poder explicar dichos resultados.

#### Colegio M

En el caso del colegio M, la maestra que utiliza el método Bancubi y material Montessori para la enseñanza de las matemáticas refiere que las matemáticas implican “el desarrollo de habilidades del pensamiento cuantitativo y lógico, por ejemplo, el razonamiento, la probabilidad, estadística y lógica” además, conceptualiza el número como “un amigo/enemigo, son parte de la vida cotidiana, por ejemplo, el peso monetario”. La maestra titular, quién también enseña matemáticas en este colegio, refirió que las matemáticas “se relacionan con la abstracción del cerebro en algo tangible, por ejemplo, observar la geometría del sol” y el número “tiene que ver con la historia”. Para lograr sus objetivos de enseñanza

consideran: la actitud, forma de presentar el material y su uso, el acompañamiento y corrección, así como la constante observación de la disposición del alumno. Por último, especifican, que la enseñanza “es muy sensorial”.

Durante las clases se observó el planteamiento de ejercicios matemáticos a partir de acciones con material (cubos Bancubi o material Montessori), siendo la observación el principal recurso para introducir los temas matemáticos. Las maestras piden a los alumnos formar un modelo y después decir qué es lo que observan, aunque las maestras dirigen las observaciones y participaciones, lo que se menciona es lo que directamente se percibe. En una clase, la maestra les pide a los alumnos construir un edificio de 2 de ancho por 5 de largo y 1 de alto. Después la maestra les comenta que ese edificio es un entero, les pide que partan ese entero a la mitad. Una vez que los alumnos realizan la indicación, la maestra les comenta que eso se llama fracciones y les comentó que “eso que partieron son fracciones, hoy vamos a ver fracciones con equivalencias, valen lo mismo, lo cual puede ser dicho de diversas formas, yo me llamo Gabriela y me dicen Gaby, ¿cuántas maneras tienen de decirte?” pregunta realizó a cada alumno y un alumno respondió: “Felipe, Felis, Felipillo”, la maestra le preguntó: “¿eres el mismo?”, y el alumno respondió: “sí”. Estas preguntas fueron realizadas con cada alumno.

Posteriormente, la maestra les pidió a los alumnos que tuvieran “ojos en el Bancubi” y preguntó “¿de cuántas maneras le podemos decir?”. La maestra les comentó que equivalencia significa “*equi* de igual y *valencia* de valor”. En seguida, la maestra les preguntó “¿cuántos decimos tenemos?” La mayoría de los alumnos respondió “10”, la maestra afirmó “en el entero hay 10 pedacitos”, y les pidió que partieran en 10 el entero que tenían. Un alumno de forma impulsiva respondió que no se podía. La maestra le pidió a este alumno que tome un cachito y le pregunta “¿cómo le digo a ese cachito?” “la décima parte en femenino, un décimo en masculino” y le pide que ahora lo partan en uno. Otro alumno preguntó ¿en uno? La maestra les comentó que en ese entero hay diez décimos, o podemos llamarle un entero.

La dinámica consistió en partir el entero en cierta medida que la maestra refería, por ejemplo, pidió partir a la mitad o un medio. La maestra les preguntó “¿cuántos decimos tiene?” Una alumna respondió 10 y la maestra le pide que observe,

mientras otra alumna respondió “5 decimos”. Los alumnos mostraron dificultades para separar lo que observaban y su correspondencia matemática.

Para repasar el análisis realizado, la maestra se sentó en el tapete y le pidió a un alumno “dame una mitad” y le pidió a otra alumna “dame 5 decimos (los iguala), ¿son lo mismo? ¿Cuál fue la palabra nueva?” La maestra y alumnos comentan que esta palabra es “equivalencia”.

Después, la maestra regresó a su lugar y pidió a los alumnos que partan en tres. Un alumno dijo que esto no se puede. Entonces, la maestra, sin insistir, les pidió que partieran en cuatro partes. Un alumno respondió nuevamente que no se podía y la maestra enfatizó lo siguiente: “el entero que está formado por diez partes no se puede partir en 3 ni en 4. Ahora partan en 5”.

Posterior a la indicación anterior, la maestra preguntó a un alumno “¿Cómo le vas a decir a ese cachito que tienes en la mano?”, el alumno no contestó y la maestra le dio una pista “usamos número ordinales”. Otro alumno dijo “empieza con “c, no con s” (quería decir quinto). Otro alumno le dijo “quin...” ya la maestra preguntó “¿cuántos quintos?, un quinto es igual a dos décimos”. Este alumno realizaba gestos de confusión, al parecer no logró observar lo que la maestra le decía.

En esta clase es posible especificar que la observación directa es el principal medio de reproducción de conocimiento, más no es suficiente para la formación de conceptos matemáticos, ya que el contenido esencial de los conceptos no se muestra de forma inmediata ni como propiedad externa de los objetos (material bancubi). La maestra utiliza definiciones, por ejemplo, equivalencia, y realiza una serie de ejercicios con la misma, sin embargo, las relaciones entre las características esenciales del número no se identifican de forma explícita. Es posible inferir que los alumnos utilizan una medida y una cantidad de veces, pero ellos no son conscientes de esto, se centran también en aspectos operativos y representativos.

### Colegio K

En la tercera escuela (K), fue posible identificar el trabajo con conceptos matemáticos. Durante la entrevista, la maestra mencionó que matemáticas son “una materia que se enseña en la escuela, que involucra números y su aplicación está en la vida diaria”. La maestra durante la entrevista expresó que un concepto necesario

de enseñar en la escuela primaria es el concepto de número, el cual tiene como características una medida, magnitud y cantidad de veces, además refirió necesario enseñar el sistema numérico, enfatizando en el valor posicional.

La maestra introdujo el tema de “fracciones” a partir de un repaso de las características del número y sus relaciones para lograr la acción de multiplicación. La maestra les recuerda el tema de la multiplicación “esta (multiplicación) es muy interesante porque ustedes ya saben que significa, que es el 5 y el 2 (señala un poster de tablas de multiplicar)” y pide a los alumnos que mencionen que significa cada elemento: medida, magnitud y cantidad de veces. A dicha solicitud los alumnos contestan “medida por cantidad de veces y nos da magnitud”. A partir de esto se recupera como característica del número a la medida y la maestra pide ejemplos a los niños, quienes dicen que pueden usar como medida la “regla, lápiz, goma, libreta, estuche” y de magnitud, lo que pueden medir (largo de ventana, pizarrón, largo del pizarrón). Posteriormente, la maestra les da una tira de papel del mismo tamaño a todos y les indica que midan un lado del cuaderno, antes de esto resume los elementos mencionados (medida, magnitud, cantidad de veces). Después la maestra pega unas láminas (papel bond) con la información trabajada y con la tabla de registro de los ejercicios que están realizando. En seguida la maestra les da una medida (tira de listón) más grande que la portada de su cuaderno, aquí introduce el tema de “fracción”, señala sus componentes matemáticos y un niño dibuja en la tabla de registro la mitad de un cuadrado (unidad).

Posteriormente la maestra muestra una hoja completa y la llama “unidad” y pega abajo dos mitades de hoja, debajo de esto coloca cuatro cuartos de hoja (manteniendo la unidad) y debajo de estos ocho octavos de hoja, la maestra enfatiza durante esta acción cuántos cuartos se necesitan para juntar la unidad, cada pedazo tiene su número correspondiente.

Después la maestra reparte el material a los alumnos, el cual ellos habían elaborado previamente, una hoja la utilizan como unidad, cuatro pedazos de esa unidad como cuartos y ocho como octavos; cada pedazo tiene su número correspondiente. La maestra coloca a los alumnos en equipos, les recuerda que el material se comparte. Posteriormente, la maestra les da a los niños una hoja con cinco situaciones problemáticas, y ellos realizan el primero de forma conjunta, enfatizando que primero

colocan las medidas (materializadas-pedazos de papel) que les indica (unidades, cuartos, octavos). La siguiente actividad fue una hoja con ejercicios de fracciones, en esta ocasión los niños no utilizaban su material de fracciones sino dibujaban el resultado, a partir de un entero (unidad) dividían y señalaban el resultado iluminando la parte solicitada, finalmente escribían el número correspondiente. Este ejercicio fue individual y se realizó sin errores y en menor tiempo. Para finalizar el tema de fracciones, la maestra hizo un resumen de lo visto, los alumnos participaban dando información y ejemplos.

Es posible identificar la formación de conceptos científicos en este colegio, la maestra conceptualiza el número a partir de conocer las características esenciales, lo cual la maestra mencionó en la entrevista y durante las explicaciones de los temas en clase. En la descripción anterior es posible observar que la maestra introduce el tema de fracciones (concepto particular) a partir de las relaciones que surgen entre una medida y su cantidad de veces que se aplica para conseguir una magnitud (concepto de número- acción de multiplicación). Específicamente, la maestra muestra la relación entre esos elementos esenciales en la fracción y los aplican a diversas situaciones mediante el uso de las medidas de volumen.

A partir de la descripción previa nos fue posible identificar que en los colegios S y M el trabajo con conceptos es de forma empírica. Las maestras de estos colegios identifican la característica de cantidad, aunque en el colegio S prevalece su aspecto operativo. En el colegio M, se trabajan con representaciones que surgen de la manipulación de objetos y su asociación matemática. En ambos casos, el número se presenta como un concepto absoluto. En las clases de fracciones, las maestras hacen referencia como números “tres cuartos, dos décimos, entero”, sin mostrar cuál es el significado u origen de estas cantidades.

En el tercer colegio (colegio K) identificamos que existe el trabajo con conceptos científicos, la maestra conoce y enseña las características del concepto de número. La maestra enseñó la fracción como una relación que surge entre una medida cierta cantidad de veces, pero esa medida es menor a una unidad. Los alumnos comprendieron esta relación y trabajan con diversas medidas.

A continuación se muestra un resumen de los conceptos que se enseña en cada colegio (ver tabla 17).

Tabla 17. Elemento de sistema de conceptos en cada colegio

Colegio S	Colegio M	Colegio K
-Empíricos (operativo)	-Empíricos (operativo) -Definiciones: abarcando características aisladas.	-Científicos (número) -Sistema de conceptos (número, sistema numérico, fracción).

## 2) Tipos de orientación

### Colegio S

En el caso del colegio S, la maestra durante las clases mostró temas como “la balanza”, “fracciones”, “multiplicación”, “solución de problemas” de forma aislada, la única característica del concepto de número abordado de forma directa fue la cantidad.

A continuación, describiremos el caso del trabajo de solución de problemas en el aula para mostrar el tipo de orientación que existe en este colegio.

La enseñanza de la solución de problemas es una tarea que la maestra considera importante, ella refiere que en tercer de primaria se trabajan con problemas que implican dos operaciones. La dificultad que la maestra observa en esta actividad es que los alumnos no comprenden el problema, para lo cual realiza lectura con los alumnos y les enfatiza que en el mismo problema se dice lo que deben hacer para solucionar. Además, ella utiliza como estrategia la identificación de palabras clave, por ejemplo, si el problema dice “regalaron”, entonces implica una suma, si dice “perdieron”, entonces es resta, mientras que “repartieron” es división. A partir de lo que refiere la maestra en la entrevista es posible observar el contenido de la tarea de solución de problemas, la maestra considera como elemento importante la comprensión del problema, para lo cual utiliza la lectura conjunta y enfatiza en palabras clave (regalar, perdieron, repartieron).

Durante la clase la maestra realizó la revisión de los problemas matemáticos que los alumnos resolvieron como tarea en casa. La maestra pide a un alumno leer el problema, este era “Ramiro tiene un costal de 157 paquetes de cacahuates y los va repartiendo en 12 paquetes, ¿cuántos paquetes tiene cada uno? ¿Le sobran? ¿Cuántos?”

Maestra: dime (mirando a los alumnos) ¿cuáles son los datos? ¿De qué está hablando el problema? ¿Lo números qué?

Un alumno: “paquetes de cacahuates”

Maestra: paquetes de cacahuates, ¿cuántos? Dime el número, y luego, entre doce, aquí lo voy a poner yo espero que ustedes le vayan entendiendo, entonces vamos a ver la operación por supuesto que es...

Una alumna: 30

Maestra: no, la operación

Otra alumna: 157 entre 22,

Maestra: exacto, ¿cómo hicieron esto?, ahorita si yo ya no les pedí es como ustedes quisiera con resta o sin resta (algoritmo de división por resta o uso de multiplicación)

Después pide a una alumna pasar al pizarrón y resolver la operación.

La alumna le comenta que ella realizó multiplicación.

Maestra: ¿Por qué hiciste multiplicación? teníamos que hacer alguna multiplicación, ayer les dije que los problemas eran de división. Multiplicación no tenías que hacer, fíjate bien. Si dice que Ramiro tiene un costal con 350 paquetes de cacahuates y los va a repartir entre sus doce parientes, ¿ahí qué tenemos que hacer?, si dice entre, no es ninguna multiplicación porque no compró, no le regalaron, dice dividir, repartir y si yo voy a repartir una bolsa de paquetes, qué tengo que hacer, ojo porque aparte ahí dice entre doce parientes, por lo tanto, tengo que hacer una división. Ojo, ahorita me dices si tienes duda (le dice a alumna que realizó una multiplicación), pero no multiplicación no solamente si el problema hubiera dicho otra cosa diferente, pero no, dice dividir. Ahorita me van a decir, porque multiplicación no es.

Posteriormente, pide a otra alumna pasar y resolver.

Maestra: Ahí si haces una multiplicación.

A partir de la descripción anterior es posible percibir que la orientación muestra las características de ser incompleta, el contenido de la tarea no es suficiente para resolver correctamente el problema. La forma de organización de la tarea es operativa con una reflexión sobre los aspectos operativos matemáticos y conductuales (pregunta-respuesta). Podemos considerar que la maestra da mayor importancia a la identificación de datos y la operación, la primera pregunta que realiza para el análisis del problema es “dime, ¿cuáles son los datos?” y posteriormente “¿de qué habla el problema?” a lo que una alumna responde sobre “paquetes de cacahuates”, la maestra repite la pregunta “¿cuántos?, dime el número” y escribe estos datos en el pizarrón, sin analizar esa situación en la que participan los números. Lo que sigue es identificar la operación, para lo cual la maestra enfatiza la palabra “entre” y considera que esto es necesario para que los alumnos asocien con una división. Sin embargo, al preguntar a una alumna y ella responder que resolvió por multiplicación, la maestra retoma el problema, lo lee nuevamente y enfatice en la palabra “entre” asociando a la “división”. Aunque la maestra preguntó a la alumna la razón, por la que utilizó una multiplicación, la maestra no le da oportunidad de explicar y continúa dando pistas para afirmar que es una división “los va repartir entre sus doce parientes, si dice entre, no es ninguna multiplicación porque no compró, no le regalaron... dice dividir, repartir”. Esta última explicación no muestra las relaciones esenciales ni diferenciales entre una operación de multiplicación y división, asociar la multiplicación con la palabra regalaron muestra la superficialidad de la operación, así mismo se simplifica la división a repartir. Además, la relación con los datos obtiene su sentido a partir de la comprensión de la pregunta final, la cual, no se consideró de forma directa.

Podemos observar que ni la tarea (solución de problemas) ni el proceso de su solución (contenido; situación del problema, pregunta final, operaciones matemáticas) tienen los elementos suficientes. Por lo que los alumnos comenten errores para identificar la operación, así como reflexionar el uso de la división o multiplicación.

También, es posible percibir que la orientación es de tipo particular, la maestra da una lista de problemas que implican división, ella misma les refiere que les había

comentado que eran problemas de división. Después, no logró mostrar las relaciones esenciales que propias de la multiplicación y de la división. Al cambiar las condiciones de los ejercicios es común que los alumnos continúen confundiendo estas operaciones, esto también fue posible observar en la evaluación individual que realicé con los alumnos.

Por último, en la descripción anterior se observa que los alumnos necesitan que la maestra confirme lo que ellos piensan o dicen, la maestra dentro de sus preguntas les da las respuestas. Esto se relaciona con el tipo de orientación dependiente.

No obstante, se observó que en la tarea de dibujo la maestra logró dar una orientación completa, los alumnos lograron dibujar las frutas considerando sus características diferenciales.

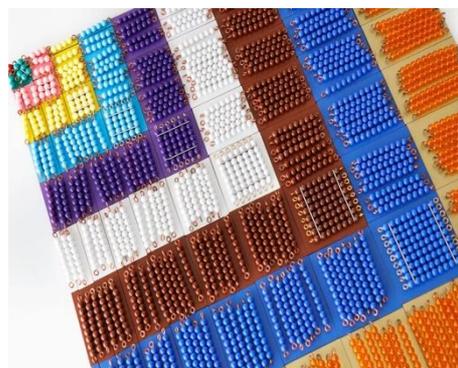
En resumen, en este colegio fue posible identificar el tipo de orientación: incompleto, concreto y dependiente.

### Colegio M

Para el siguiente tipo de orientación observado en el colegio M describiremos la clase con la tabla de Pitágoras. La maestra realizó la clase en el tapete y mediante el uso de material Montessori. La tarea consistía en poner cadenas de bolitas de forma ascendente de manera vertical y horizontal (tabla de Pitágoras), e ir completando los espacios mediante la secuencia de cadenas. En la siguiente figura (3) mostramos una imagen similar al material y su organización.



(a)



(b)

Figura 3. (a) Barras de collares Montessori, (b) organización esquemática en tabla de Pitágoras

Después de que la maestra junto con los alumnos organizaran dicha tabla, la maestra les pedía comentar lo que observaban. Cada alumno participó, algunos comentaron: “cadenas de muchos colores” “van de 1, 2, 3, de diferentes colores” “unas más largas y otras más pequeñas” “del 1 al más grande” “veo que aumenta” “todas son de 1 y 2 líneas” “frente por lado” “observo que aumenta también hacia abajo” “veo que algunos parecen cuadrados” (por ejemplo,  $2 \times 2$ ), “otros parecen rectángulos” (por ejemplo,  $4 \times 3$ ) “ $10 \times 10=100$ ” “son multiplicaciones” “ $2 \times 2= 3$ ” “todos forman un cuadrado”. La maestra repetía e integraba cada comentario, posteriormente, les comentó a los alumnos que había cadenas que se repetían, por ejemplo,  $2 \times 3$  y  $3 \times 2$ , y fue retirando estas cadenas. La maestra también mencionó que esta tabla tenía relación con las multiplicaciones y preguntó a los alumnos “si tuvieran que aprender todas las tablas de multiplicación ¿cuántos resultados tendrían que aprenderse?”

Un alumno respondió que “100”, mientras otro mencionó “otra cosa de la multiplicación es cuando multiplicas 4 millones por cero es cero”. Otro alumno enfatizó “conforme vas quitando se haciendo más pequeño”

Después la maestra preguntó “¿qué figura va a quedar?”

Un alumno contestó “una escalera”, otro alumno “Triángulo”

La maestra les comentó “¿quién descubre cuántos resultados?”

Los alumnos iniciaron a responder “50” “49” “55”

La maestra concluyó “55 resultados, en total eran 100,  $100 - 10$  (repetidos) = 90, la mitad de 90,  $45 + 10$  (cuadrados) = 55”. En vez de aprenderse los 100 resultados nada más nos tenemos que aprender 45, porque  $55 - 10$  (tabla de 1), quedan 45- 8 (tabla de 10)...

Alumno: “30”, otro alumno: “37”, otro alumno: “sí, que padre”.

Posteriormente la maestra mostró la Tabla de Pitágoras en una hoja y comparó con el modelo de cadenas que habían realizado. Para finalizar, entregó a los alumnos

una hoja que tenía dibujado dicho modelo con cadenas para que los alumnos dibujaran la cantidad de bolitas de cada cadena.

Es posible apreciar que la principal vía de conocimiento surge a partir de la observación directa, los alumnos inician respondiendo sobre lo que perciben (color, tamaño, forma), posteriormente van asociando a relaciones matemáticas (multiplicación). Sin embargo, los elementos de la orientación no son suficientes, por un lado, es posible observar el aumento de cantidad, pero este no se relaciona con alguna de las características esenciales del número. Se trabaja la propiedad conmutativa,  $3 \times 2$  igual a  $2 \times 3$ , las cuales van siendo eliminadas durante la demostración del modelo, aunque no se enseña como una propiedad sino como una relación externa (forma que tiene la cadena) y pragmática. Entonces, en cuanto a contenido, este no es el necesario ni suficiente para elaborar relaciones teóricas ni en sistemas. Se trata de un contenido particular que no puede ser generalizado por los alumnos. Otro ejemplo, durante la tarea de construcción de la tabla de Pitágoras, la maestra refiere que la multiplicación es un producto de dos factores, mientras que la suma da como resultados totales.

Por otro lado, los alumnos durante las clases y evaluación mostraron una necesidad de utilizar el material para resolver tareas matemáticas. En este colegio, los alumnos utilizan su material para aprender en clases en la siguiente secuencia: primero, los alumnos deben armar un modelo, luego comentar lo que observan y posteriormente dibujar o escribir su expresión matemática correspondiente. Los alumnos pueden expresar verbalmente lo que ellos realizan con su material. Una alumna comentó en un ejercicio de multiplicación, que iba aumentando de siete en siete, y que coloreó la parte de  $7 \times 7$ , porque es un cuadro perfecto, "este lado es el mismo que el otro". Sin embargo, fue posible observar que los alumnos cometen errores en tareas que requieren de conversión de medidas (centenas a decenas, decenas a unidades). En una tarea de división, los alumnos tenían que repartir una cantidad entre unos muñequitos de madera, la alumna tenía 57 entre 7, inmediatamente ella repartía las unidades y, al querer repartir las decenas, se daba cuenta que no era posible.

La alumna comenzó por ensayo y error a mover los cubos de un muñequito a otro, hasta que preguntó a la maestra qué podía realizar, la maestra le recordó mediante

preguntas esos cinco cubos qué valor tenían. Después la alumna cambio esos cinco cubos por unidades y comenzó a repartir de uno en uno.

Durante la evaluación con cada alumno también fue posible observar la dependencia del material. La mayoría lo requirió para poder realizar operaciones matemáticas, a algunos les bastaba con mirarlo, otros si requerían convertir los valores de acuerdo a su color indicado (verde unidades, azul decenas y rojo centenas), realizar una acción después de la otra, es decir, de forma desplegada. Los alumnos, además, mostraron agrado y seguridad al usar dicho material.

La corrección en este colegio es de forma inmediata, los alumnos comenten errores y la maestra les da “pistas” para que puedan modificar, pero no mostrando la relación matemática, sino lo que han realizado con el material. Sin embargo, esta corrección permite que los alumnos se involucren en las actividades.

Al tratarse de un contenido con definiciones que solo muestra las relaciones externas y su asociación material, el tipo de orientación es incompleto. También, fue posible identificar la solución de tareas que no son trabajadas en sistemas sino como casos particulares (multiplicación-producto, suma-total), por lo que la segunda característica de la orientación es particular. Finalmente, al observar que los alumnos necesitan del material constantemente para resolver las tareas, se concluye como tercera característica de la orientación, la dependencia hacia el material. Así, este colegio tiene una orientación incompleta, particular y dependiente (material).

### Colegio M

Para describir el tipo de orientación que se ocupa en este colegio presentaremos una sesión en la que se trabajó la solución de problemas.

La maestra dicta y escribe en el pizarrón el problema, espera a que los alumnos escriban. El problema fue:

Maestra: inciso a, ¿todos ya tienen lapicero o a alguien le hace falta?... Germán colecciona tarjetas (coma), tiene 53... ¿Gérman o Germán?... ojo (pide verificar a los alumnos) ... tiene 53 que representan un quinto de su colección, lo representamos en fracción, chicos... pregunta, signo de pregunta ¿cuántas tarjetas tiene en total?... cuántas, acuérdense es pregunta (énfasis en el acento, lo señala en el pizarrón) ... inciso b, Isa, ahora participa Isa nuestra compañera Isa, tiene una caja con 2556

manzanas (la maestra verifica que los alumnos escriban correctamente) coma, cinco novenos son rojas, y el resto verdes (una alumna: ¿cuántas verdes hay?), si claro ¿cuántas manzanas rojas hay\_\_\_\_? ¿Cuántas manzanas verdes hay\_\_\_\_? ¿Cuántas manzanas hay? (un alumno: ¿cuántas manzanas equivale a un noveno?) ¿Cuántas manzanas equivalen a un noveno del total?

La maestra les da tiempo para terminar de copiar los problemas. Después de la maestra solicita “alguien nos quiere ayudar a leer la tarjeta de solución de problemas” un alumno participa y lee: “a) lee el problema, b) con tus palabras menciona qué es lo que se pregunta en el problema, c) escribe que datos conoces (M, m y v), c) responde con los datos que tienes puedes responder la pregunta, d) elige la operación matemática necesaria y escribe la formula, e) realiza los pasos necesarios para resolver la operación, f) verifica el resultado.

La maestra enfatiza en esos pasos: “vamos a trabajar en equipos para poder resolver, cuando tengan el trabajo lo vamos verificando en el pizarrón... de acuerdo... lo vamos haciendo...datos, formula, operación y resultado, y después lo que trabajamos es nuestro esquema y lo representamos”. Numero 1 tenemos que leer nuestro problema, inciso b) mencionar que es lo que se nos está ¿qué?... (los alumnos responden: preguntando) preguntando, muy bien, luego tenemos que c) escribir qué datos, lo que conocemos, acuérdense de que hay problemas donde sobran datos, faltan y donde están lo que se necesita, acuérdense que hay problemas que no se pueden resolver (faltan datos), después respondemos ¿con los datos que tenemos podemos responder la pregunta?, después elegir qué operación vamos a utilizar para resolver el problema, y bueno... ya después a seguir los pasos necesarios, vamos viendo nuestra incógnita, y ya con nuestra operación damos el resultado”

Posteriormente, la maestra les solicita trabajar en equipos, ella los forma, dos equipos de dos alumnos y uno de tres alumnos, también les comentó que finalizarían resolviendo para el grupo.

La maestra se acerca a cada equipo y pide a un alumno leer el problema, después a otro leer la tarjeta de orientación e ir realizando los pasos indicados en dicha tarjeta. Por ejemplo:

Maestra: ¿Con tus palabras qué es lo que les pregunta el problema?

Alumno: ¿cuántas tarjetas tiene en total?

Maestra: ¿esto es el total de tarjetas o es una parte? (señalando un dato del problema, un quinto)

Alumno: una parte,

Maestra: ¿cuántas partes más?

Alumno: son un quinto del total

Maestra: entonces podemos poner nuestros... ¿qué tenemos que poner?...

Alumno: datos

Maestra: aja, ve escribiendo los datos.

La maestra supervisa el trabajo de cada equipo, les recuerda lo que implica el trabajo en equipo, les pide ayudar a sus compañeros para que no se atrasen. Al terminar los alumnos de responder ambos problemas, pide a un equipo pasar al pizarrón para explicar su resultado.

Una pareja de alumnos pasa al pizarrón para resolver el primer problema, Germán colecciona tarjetas, él tiene 53 que representan un quinto de su colección ¿cuántas tarjetas tiene en total? Los alumnos escriben en el pizarrón las palabras: datos, formula, operación y resultados. En datos la alumna escribe  $M = \text{¿?}$ ,  $m = 53$ ,  $v = 5$ , la formula  $m \times v = M$  y la operación  $53 \times 5$  (mediante algoritmo), la alumna resuelve la operación y escribe debajo de datos el valor de la  $M = 256$ . Después, la alumna escribe el resultado al final de problema escrito en el pizarrón. Por último, su compañero de equipo dibuja la representación del problema, él dibuja un rectángulo y divide en cinco partes, en cada parte escribe 53.

De esta forma fue solucionado el segundo problema. Al finalizar, la maestra lee el problema y repasa el procedimiento que los alumnos utilizaron para resolver. No obstante, las respuestas a las preguntas no son de forma completa, los alumnos responden solo la cantidad, sin considerar la medida.

Es posible identificar el contenido de la orientación, es completa debido a que se trabajan con las características esenciales del concepto de número (magnitud-M,

medida-m y cantidad de veces-v), los alumnos identifican estas características en una situación problema. Además, la orientación de la tarea de solución de problemas se muestra en una tarjeta, los pasos permiten la comprensión del problema y de su solución. La maestra en la clase enfatizó en la búsqueda de datos y su expresión en la fórmula correspondiente, para lo cual utilizaba preguntas de reflexión y en ocasiones frases incompletas.

Otra característica de la orientación fue el uso general de ejercicios, la maestra utiliza diversos tipos de ejercicios para esta actividad, ella menciona las posibilidades que existen en la solución de problemas (con o sin solución, datos faltantes, datos necesarios). Los problemas que ella redactó muestran diversidad debido a que en el primer problema plantea una pregunta, pero en el siguiente, plantea tres preguntas que se relacionan y son dependientes. Otro aspecto, es que, al trabajar con las características del número, los alumnos identifican estas en diversas situaciones problemáticas (suma, resta, división y multiplicación).

Finalmente, la orientación fue independiente, los alumnos al tener esta tarjeta de orientación les permite realizar las acciones, algunos alumnos no necesitaban esta tarjeta y la tenían volteada en su mesa de trabajo, otros requerían de esta tarjeta y otros de un compañero que fuera verbalizando los pasos. Las dudas y errores que surgían se asociaban con la inquietud de querer resolver rápidamente el problema. Aunque, también fue posible observar que los alumnos al final contestaban con el resultado de la operación, y no de forma completa a la pregunta del problema.

El tipo de orientación de cada colegio se muestra en la siguiente tabla (18).

Tabla 18. Elemento de tipo de orientación en cada colegio

Colegio S	Colegio M	Colegio K
-Dependiente (maestra) -Particular -Incompleta	-Dependiente (material) -Particular -Incompleta	-Independiente -general -Completa

### 3) Tipos de acciones

#### Colegio S

La maestra en la entrevista mencionó utilizar materiales concretos y el uso de TIC para la enseñanza de las matemáticas, los alumnos describieron durante la evaluación individual que la maestra utiliza el proyector y computadora para mostrar el libro de texto y realizar los ejercicios del mismo.

En el trabajo de campo fue posible identificar que la maestra utiliza como material recortes de números o de imágenes, las cuales solo tienen función de representación visual y no de manipulación para mostrar las relaciones matemáticas. Los alumnos realizan cálculos mediante recortes de operaciones figura 4.

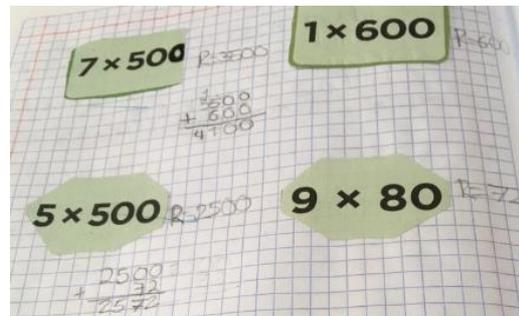


Figura 4. Acciones con material recortado.

Otro tipo de acciones fueron a partir del dibujo concreto, los alumnos dibujaban frutas para realizar ejercicios de comparación de peso en la balanza, por ejemplo, ellos dibujaron una balanza y en una parte de la balanza dibujaron una naranja y en la otra parte dos limones, mostrando que ambos lados tienen el mismo peso, así con diferentes frutas (ver figura 5). Aunque, estas acciones no representan alguna relación matemática.

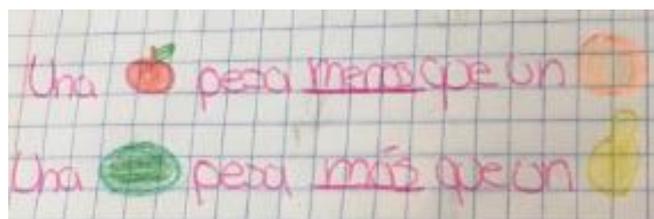


Figura 5. Acciones perceptivas concretas en colegio S

El siguiente tipo de acciones que observamos fueron las acciones verbales externas mediante la escritura, este tipo de acciones son las que predominan en clases. Los alumnos resuelven tareas del libro o ejercicios que la maestra lleva. En la figura 6 se muestra un ejercicio del libro, el alumno lee, realiza el algoritmo y responde.

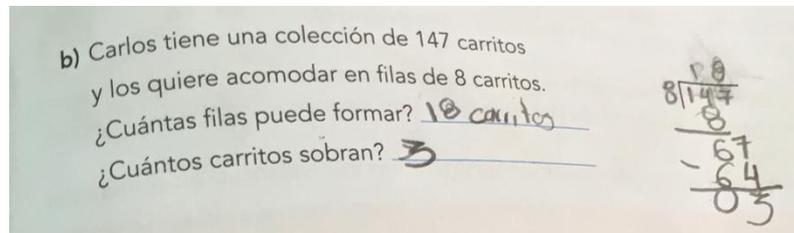


Figura 6. Ejercicio de libro de matemáticas

En el siguiente ejercicio del libro (figura 7), los alumnos en el ejercicio 1 tenían que identificar la fracción en una figura geométrica dada, en el ejercicio 2 tenían que completar la representación de la fracción y en el ejercicio 3 resolver un problema. La maestra ayudó a los alumnos a resolver estas tareas, escribiendo los ejercicios en el pizarrón, repitiendo indicaciones y usando preguntas sobre la cantidad “¿cuánto es la mitad?” “¿de qué color van a dibujar?” Los ejercicios de esta parte del libro trabajan solo la identificación de la fracción, ya sea indicando qué parte es o cuál es la faltante.

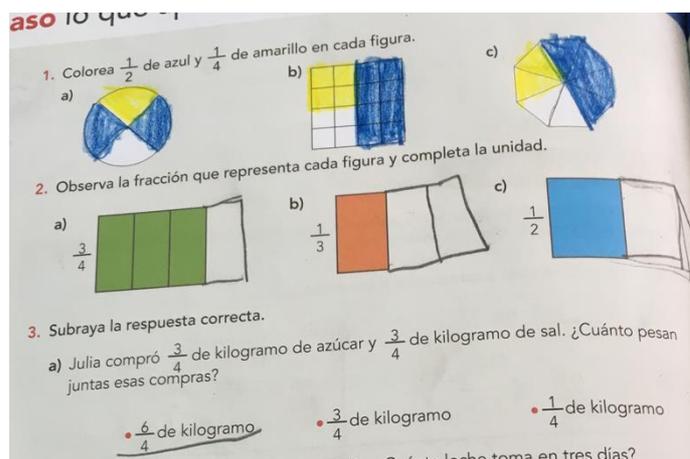


Figura 7. Ejercicio de fracción del libro de matemáticas.

Esta dinámica de trabajo también se realiza con ejercicios que la maestra brinda, en la figura 8 se muestra un ejemplo del cuaderno de un alumno. Se plantea un

problema y se soluciona. Aquí es posible identificar que este alumno resuelve con algoritmo, aunque su respuesta es correcta en relación a la situación problema y operación, el alumno no logra identificar los datos, debido a que en su algoritmo el divide entre dos, mientras que el problema indica 11. En este tipo de casos, es necesario que el alumno siga los pasos para poder comprender y expresar matemáticamente las relaciones que surgen de la situación problema.

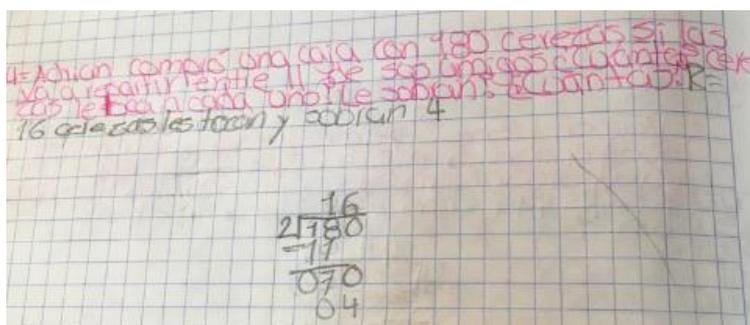


Figura 8. Ejercicio brindado por la maestra para resolver en cuaderno

Por último, en esta forma de enseñanza, la maestra utiliza tareas de cálculo mental, en las cuales los alumnos solo escriben los resultados. Durante la evaluación dinámica con los alumnos, la mayoría de ellos intentaba resolver las operaciones sin escribir pero si mediante el conteo de sus dedos, aunque en su mayoría no lograban el resultado correcto, esto será descrito a detalle más adelante.

### Colegio M

En el colegio M, la maestra mencionó utilizar material bancubi o Montessori para explicar los temas, para ella es muy importante observar si los alumnos llegan con disposición para trabajar con el material.

Durante las clases de matemáticas fue posible observar acciones materializadas. Los alumnos inician su aprendizaje con el uso del material bancubi. Las tareas que realizan con este material son: formar cantidades, comparar cantidades, operaciones de suma, multiplicaciones, reparto y algunas tareas de geometría (calcular área y

volumen). Los alumnos muestran agrado hacia el uso del material, algunos juegan con el material antes de escuchar las indicaciones de la maestra, pero después de la repetición de indicación, realizan lo que se les solicita. Además, ellos pidieron usar su material durante la evaluación dinámica.

En ocasiones el trabajo en el ambiente es de forma individual con su libro Bancubi, los alumnos se sientan donde les agrada más y cada uno trabaja en el tema que va aprendiendo. Un alumno estaba trabajando tareas de fracciones equivalentes, en el libro bancubi se le indicaba crear un modelo con sus cubos, semejante al ejercicio trabajado con su maestra. El alumno formaba dichos modelos con sus cubos, después tenía que partir el entero en tantas partes solicitadas y colorear en su libro la parte correspondiente. Así mismo, en este libro se plantean preguntas que relacionan las partes con el entero, en el cual el alumno no solo responde con las cantidades sino redacta su proceso de solución. Los alumnos suelen comentar en voz alta las acciones que van realizando, también suelen explicar algunas acciones a sus compañeros y hacer preguntas específicas a la maestra. En la siguiente figura (9) se muestra un ejemplo de tarea del libro Montessori.

Forma con los cubos	La multiplicación es	Primer factor	Segundo factor	Producto
2424 x 2424				

Figura 9. Tarea del libro Montessori, elaborado por la investigadora.

Por último, en relación con este colegio, a pesar de una acción en diferentes planos de ejecución (materializada, dibujo, escritura) es posible identificar que son acciones aisladas, el elemento común es el uso de material y la cantidad, más no el contenido matemático.

### Colegio K

La maestra del colegio K también inicia su enseñanza con acciones materializadas. La maestra primero explica el concepto de número (magnitud, medida y cantidad de veces), después plantea un problema a partir de la acción de medición (les da a los alumnos una medida mayor a la magnitud).

Las acciones materializadas son sustituciones de objetos que son utilizados previamente, un listón es una medida, posteriormente se sustituye por pedazos de hojas que representan una medida correspondiente (una hoja completa es una unidad, las partes divididas de la hoja representan las partes de esa unidad).

Las medidas representadas por las partes de una hoja (unidad) permitían que los alumnos conservaran la relación entre la Magnitud y medida, ellos utilizaban primero la hoja (unidad-entero) y después colocaban encima la medida que se les solicitaba en el ejercicio (ver figura 10), por ejemplo, dos partes, cuatro partes, seis u ocho partes etc. Posteriormente, los ejercicios en el plano perceptivo, en los que ellos debían dibujar las partes de un entero, se observaba que se les proponían ejercicios con diversas formas geométricas para dividir en partes iguales. Después los alumnos tenían que representar con la fracción correspondiente.

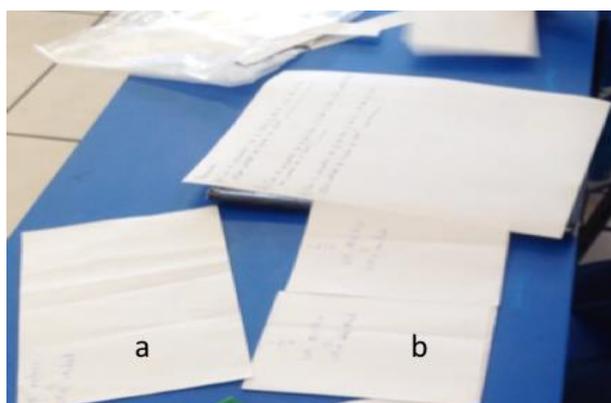


Figura 10. a) unidad representada con una hoja; b) partes divididas de la unidad (dos-mitad)

Las acciones verbales se observaron en el momento en que los alumnos explicaban a sus compañeros cómo debían solucionar las tareas. Estas acciones se observaron principalmente a una alumna que explicaba de forma completa, usando las características esenciales de las fracciones (medida, unidad, entero, partes) y mostrando su relación mediante las acciones correspondientes (identificación, comparación y transformación del entero y sus partes). A continuación, se describe el dialogo que tuvo esta alumna con su compañero: “primero, lee el enunciado”, “¿cuántas unidades te dice, o cuartos u octavos?”, “ahora ponlos” “fíjate en el

pizarrón (y señala)"¿cuántos cuartos hay en una unidad?". Su compañero atendió todas las indicaciones, y juntos lograron las actividades propuestas de forma exitosa.

En resumen es posible identificar que en el colegio S predominan las acciones verbales, principalmente en el plano de escritura de números. Además, las acciones son realizadas de forma aislada y no siempre es posible identificar el objetivo de cada acción, los alumnos resuelven sin reflexionar sobre el contenido matemático. En relación con la tarea de cálculo mental, los alumnos han logrado mecanizar resultados de operaciones sencillas, cuando las tareas se complejizan los alumnos prefieren utilizar sus dedos para contar en lugar de escribir o describir sus acciones.

En cambio, las maestras de los colegios M y K utilizan los tipos de acciones materializadas, perceptivas y verbales externas. Es posible identificar que en el colegio M cada tema matemático es abordado por la siguiente secuencia: materializada-perceptiva-lenguaje externo. Sin embargo, los contenidos no se relacionan entre sí, es decir, el tema de fracciones equivalentes se enseñó a partir de la manipulación de cubos, dibujo de modelos y su asociación con números, más no se identifican elementos esenciales que se relacionen con otros temas, por ejemplo, la multiplicación. Además, es posible observar que esta secuencia son acciones reproductivas, y al ser tan concretas es difícil generalizar el conocimiento matemático.

El colegio K también utiliza la secuencia: materializada, perceptiva y verbal externa. Aunque, el contenido matemático (medida, cantidad de veces y magnitud) son identificadas y realizadas durante esa secuencia. En cada acción es posible identificar un objetivo matemático porque los alumnos reflexionan sobre las características esenciales del concepto de número, utilizan el material como apoyo y es posible prescindir de dicho material una vez que ellos comprendieron el proceso de la tarea. Entonces, en este colegio existe un contenido que permanece y no solo solución de ejercicios aislados, como en los colegio anteriores.

A continuación mostramos en la tabla (19) las acciones que utilizan las maestras en cada colegio.

Tabla 19. Elemento de tipos de acciones en cada colegio

Colegio S	Colegio M	Colegio K
-Verbales externas (escritura)	-Materializadas (cubos de bancubi y material Montessori)  -Perceptivas (dibujo concreto)  -Verbales externas (escritura)	-Materiales y materializadas (hojas para representar la medida, acciones de conversión y comparación)  -Perceptivas (dibujo)  -Verbales externas (escritura, exposición)

#### 4) Tipo de colaboración

##### Colegio S

Primero podemos señalar que la cantidad de alumnos y el espacio del aula obligan a una organización por filas de las sillas escolares, por lo que alumnos están uno detrás de otro, consideramos que esta ubicación dificulta la interacción entre los alumnos.

La maestra expresó en la entrevista que “en la escuela ya no se utilizan las actividades colaborativas, los alumnos ahora no quieren compartir sus actividades, no logran ponerse de acuerdo” por lo que en ocasiones la maestra pide a los alumnos ayudar a algún compañero. Sin embargo, los alumnos no conocen la forma de ayudar, suelen compartir solo los resultados.

Durante las clases fue posible identificar que la relación que prevalece es maestra-alumno. Como la maestra expresó, los alumnos no se apoyan para responder los ejercicios, solo se hablan para verificar resultados y decirse los resultados. Fue posible observar que casi no hay colaboración entre ellos. Una alumna necesitaba tijeras para realizar su ejercicio, por lo que pidió tijeras a los compañeros que estaban cerca de ella, pero las tres alumnas le negaron las tijeras, a pesar de no

estar utilizándolas. En otras ocasiones se observó que algunos alumnos respondían mal los ejercicios o no los terminaban, porque no alcanzaban a escribir y sus compañeros no les ayudaban.

Por otro lado, la mayor cantidad de las tareas que la maestra propone son para realización individual. La maestra da instrucciones generales, genera la participación de los alumnos de forma directa, preferentemente a los alumnos que conocen las respuestas. Aunque los alumnos piden constantemente participar, no siempre logran aportar a la solución, debido a la restricción de tiempo o a no estar seguros en su respuesta. En la clase del tema “¿qué pesa más?” un alumno quería saber “maestra ¿qué pesa más un bunker o un lápiz?” para lo cual la maestra preguntó “no sé, dime tú”, pero no le dio oportunidad de expresar su idea.

### Colegio M

En el colegio M, el aula es grande. Las mesas están organizadas por grupos de cuatro de diferentes tamaños, para que los alumnos de diferentes grados puedan interactuar mientras trabajan. Otro elemento importante es el tiempo asignado para el trabajo de las tareas de matemáticas, las cuales son de 20-30 minutos.

En el aula conviven alumnos de primer a tercer grado, una maestra titular y una maestra de inglés; los días que corresponden a enseñanza de las matemáticas con método bancubi asiste la maestra correspondiente. La interacción entre la maestra y los niños de forma general es emotiva, amable y muy agradable. Las maestras y los alumnos tienen una actitud positiva y empática hacia la colaboración entre todos, se ayudan, platican tanto de temas de las tareas como de vivencias personales, y expresan su agrado o desagrado hacia las tareas. Por ejemplo, en la tarea en la tenían que colorear las bolitas de collares Montessori (tabla Pitágoras), una alumna expresó su desagrado por dibujar uno a uno las bolitas de las cadenas del material Montessori y su compañera le dio ánimo para que realizara. Esta compañera le decía “si inicias más rápido terminarás más rápido”. En otra ocasión, la maestra de matemáticas les avisaba a los alumnos que faltaban 5 minutos para terminar la clase y los alumnos en general expresaron su desacuerdo, ellos querían seguir

trabajando, en esta ocasión la maestra expresó “¿Cuándo has visto que los alumnos quieran seguir aprendiendo matemáticas?”.

La relación entre maestra-alumno es cordial, las maestra no levantan el volumen de voz para llamar la atención de los alumnos, ellas tocan una campana y esperan hasta que todos guarden silencio para dar las indicaciones, solo se observó la intervención individual de un alumno que terminaba las tareas pronto y de forma desorganizada para correr o jugar dentro del aula, la maestra lo guiaba hacia su lugar para corregir y frecuentaba su supervisión para que el alumno lograra correctamente las tareas. También fue posible percibir una interacción por medio de abrazos y palmadas en la espalda de las maestras hacia los alumnos.

Durante la entrevista la maestra de matemáticas compartió que para ella el acompañamiento es necesario hasta que el alumno pueda compartir con otros ese conocimiento o domina el nombre del material, de otra forma terminamos con la voluntad del niño. La maestra tiene un control, en el cual escribe los logros de los alumnos. En este control ella cualifica si el desarrollo de esa habilidad está en proceso, la ayuda que requiere o si está listo para compartir el conocimiento. La forma de corrección en los niños es mediante la observación y cuestionamiento (pistas). Por último, refiere que el trabajo deber ser en conjunto con los papas, y buscar un interés en el alumno. Este registro que la maestra realiza de cada alumno permite tener una mejor interacción debido a que ella prepara los tipos de ayudas o pistas que necesita cada alumno, así como supervisión.

Otro elemento importante fue que la maestra titular refiere la diferencia entre acompañamiento y sobreprotección, debido a que este último ocasiona que el alumno pierda el entusiasmo por aprender. Por ello, esta maestra también considera importante la participación de los papás de los alumnos.

Por último, la relación entre alumno-objeto, se pudo percibir que a los alumnos les gusta trabajar con su material, ellos buscan interactuar con el material, formar filas, edificios, repartir, entre otras acciones. Específicamente en matemáticas los alumnos realizan tareas de aumento, disminución, conversión de medidas, división, y de geometría. Los alumnos siempre tienen la posibilidad de observar con el material el contenido de matemáticas trabajado en el aula y realizar las acciones correspondientes.

## Colegio K

En el colegio K, fue posible observar un aula con espacio amplio, las mesas de trabajo de los alumnos están colocadas en forma de U, los alumnos se sientan en parejas y como ellos elijan. La relación entre la maestra y los alumnos es positiva, agradable y respetuosa. Los alumnos comentaron que les agrada mucho trabajar con su maestra porque explica bien y las veces que sean necesarias para que ellos comprendan el tema. Además, fue posible percibir una forma positiva de corregir a los alumnos, mediante el uso de modelos visuales y con un adecuado tono de voz.

La relación entre alumnos también es positiva. Los alumnos explican las tareas unos a otros y se ayudan hasta lograr los resultados de estas. No obstante, fue posible percibir la dificultad de un alumno para trabajar con su coetáneo, este alumno estaba interesado en terminar pronto la tarea y casi no interactuó con su compañero. La maestra, al percibir esta situación, solicitó y orientó al alumno para que ayudara a su compañero. La forma de reflexionar esta situación por parte de la maestra fue mediante el recordatorio del objetivo de trabajar en equipo y aceptando que cada alumno tiene habilidades diferentes, pero todos pueden ayudarse para realizar las tareas.

Por último, la relación entre alumno-objeto fue adecuada, se percibe que esta interacción ocurre en el tiempo que el alumno requiera de actuar y resolver las tareas con este. Los alumnos pronto dejan el material y pasan a otro plano de ejecución. Estas acciones les permiten identificar el contenido matemático esencial y más adelante se apoyan en este para explicar sus resultados, no como un objeto concreto sino como una sustitución del contenido matemático.

De forma general, es posible comentar que el número de alumnos y el espacio físico del aula favorecen para tener una mejor organización y mayor interacción entre los alumnos, como se observó en los colegios M y K.

Específicamente, es posible percibir que el colegio M tiene de forma explícita el objetivo de organizar el ambiente para que los alumnos tengan una convivencia más emotiva. Esa forma de organizar consiste en regular el tono de voz, corregir de forma positiva, dar abrazos, consideran, fomentan la participación constante de los alumnos y la convivencia entre los alumnos en actividades cotidianas (comer,

festejar un cumpleaños, etc.). Los alumnos muestran una actitud positiva hacia su maestra y compañeros.

Los tipos de interacción que encontramos en cada colegio se resumen en la siguiente tabla (20).

Tabla 20. Elemento de tipo de colaboración en cada colegio

Colegio S	Colegio M	Colegio K
Alumno-objeto: no existen.	Alumno-objeto: acciones con cubos.	Alumno-objeto: acciones materializadas (hoja como medida)
Alumno-alumno: verificación de resultados.	Alumno-alumno: solución de tareas conjuntas, verificación de resultados, apoyo.	Alumno-alumno: apoyo mediante la explicación verbal y perceptiva, colaboración para solucionar, preguntas sobre instrucción (recordar o afirmar).
Maestra-alumno: explicación del tema, incitación de respuestas, repetición.	Maestra-alumno: explicación del tema, acompañamiento-reflexión-observación.	Maestra-alumno: explicación del tema, preguntas dirigidas, repetición de explicación.

### 5) Desarrollo de conceptos matemáticos (alumnos)

En este elemento incluimos los resultados de la evaluación dinámica aplicada a los alumnos de los tres colegios. Presentaremos las respuestas de los alumnos por cada colegio considerando las tareas y el contenido matemático del protocolo de evaluación: a) concepto de número y sistemas de medidas, b) solución de operaciones y c) solución de problemas matemáticas (simples, complejos, redacción mediante datos y creación libre). Sin embargo, los alumnos del colegio Montessori no realizaron las tareas de solución de operaciones, debido a que durante la entrevista las maestras de estos alumnos consideraron que ellos no sabían desarrollar los algoritmos porque no se les enseña de esa forma, también consideraron que el tiempo de aplicación del protocolo de evaluación (1 hora y 20

minutos) era demasiado para ellos, debido a que los alumnos están acostumbrados a trabajar de 20-30 minutos en una asignatura, por último, las maestras mencionaron que solo podía asistir al colegio durante tres días para realizar las actividades de evaluaciones. Por lo que para estos alumnos se realizaron ajustes al protocolo de evaluación.

De forma general es posible compartir que todos los alumnos tuvieron una participación adecuada, asistieron a las sesiones con una actitud positiva, mostrando interés y curiosidad por participar. Aunque, algunas alumnas del colegio S se mostraron un poco nerviosas por no lograr responder correctamente las tareas, por lo que se dio mayor acompañamiento y animación para que logran regular su estado emocional. Las evaluaciones del colegio S y K se trabajaron en otro salón, considerando su horario de clases para no interferir en clases que fueran de su agrado, por ejemplo, educación física. En cambio, con los alumnos del colegio M las evaluaciones fueron en el mismo ambiente (aula), trabajando en una mesa, en ocasiones algunos alumnos de otros grados se acercaban y querían ayudar a sus compañeros, en otras ocasiones (muy pocas) existieron distracciones que fueron superadas prontamente por la investigadora y los alumnos.

También podemos compartir que la tarea que mas generó agrado a los alumnos fue la creación de problemas, no importaba el tiempo que tardaran ellos se esforzaban por redactar, a veces borraban una y otra vez hasta que el problema quedara claro para ellos y sus compañeros.

A continuación describimos los resultados del primer apartado del protocolo de evaluación, concepto de número y sistema de medidas. Estos apartados son necesarios presentar de forma conjunta porque permite relacionar lo que el alumno menciona conocer, lo que identifica y aplica en tareas matemáticas de forma inmediata. En el apartado de concepto de número indagamos en las ideas y representaciones que los alumnos han formado, en el apartado de sistemas de medidas es observamos si estas representaciones son generales o solo concretas.

## A. Concepto de número y sistema de medidas

### Colegio S

La mayoría de los alumnos del colegio S mencionaron la característica de la cantidad, algunos más se les pedía que dieran ejemplos cuando no les era posible describir el número, por lo que todos lograron esta tarea. Los alumnos tuvieron respuestas relacionadas con el componente simbólico (representación) y matemático. En la tabla 21 presentamos de forma general las respuestas relacionadas al concepto de número.

Tabla 21. Respuestas de los alumnos del colegio S sobre concepto de número

Preguntas	Categorías	Respuestas de los alumnos
¿Qué es el número?	Símbolo	Cifra
¿Para qué sirven? ¿Qué números conoces?	Uso	Contar, hacer multiplicaciones, sumas, restas y divisiones

En relación con el sistema de medidas, la primera respuesta de los alumnos fue la de desconocer el significado de “sistema numérico decimal”. Cuando se les solicitaba “¿qué piensas o imaginas al escuchar sistema numérico decimal?”, los alumnos respondían lo siguiente “un sistema de miles” “tiene números que se suman y restan” “1 al 10 por eso dice decimal” “orden” “vamos numero por numero” “tabla de números”. Es posible identificar que los alumnos perciben el número como un objeto invariante (cantidad), es decir, desconocen el papel que tiene la medida en el número. Confunden dígito con números y medida con cantidad. Esto queda evidenciado en las siguientes respuestas, ante la tarea: en el número 1597 ¿qué dígito vale más? Los alumnos responden: “9 porque en la secuencia 9 va después del 1” (ver tabla 22).

Tabla 22. Respuestas de los alumnos del colegio S sobre el sistema numérico decimal

Pregunta	Respuestas correctas	Ejemplo	Respuestas incorrectas		Tipo de ayuda
			Tipo de error	Ejemplo	
¿Qué es una unidad?	1	1, 2,3, 4...9	Conceptual Valor posicional número	“como una cantidad alta o baja”	-Escritura del número  -Escritura del valor posicional
¿Qué es una decena?	10 en 10	Segundo numero		“primera filita de unidad, después centenas y decenas”	
¿Qué es una centena?	100	100 hasta 999		“cifra de tres números” (decena)  “nos ayuda para más las cantidades” (centena)	
En el número 182, ¿qué dígito vale más?	1 mas	Vale 100	Valor posicional	“El 8 es más que el 1”	-Escritura del número  -Escritura

Pregunta	Respuestas correctas	Ejemplo	Respuestas incorrectas		Tipo de ayuda
			Tipo de error	Ejemplo	
En el número 1597, ¿qué dígito vale menos?	1 vale más y 7 menos	1 vale un millar		<p>“el que vale más es el 9”</p> <p>“el 9 vale más el que vale menos es el 1”</p>	del valor posicional

En relación con el uso de otros sistemas de medidas, se observó que los niños son capaces de obtener un número en base a otras medidas con apoyo perceptivo y verbal. Por ejemplo, en la pregunta “en el sistema con medida 3, ¿cuántas unidades y decenas tendría el número 13?”, los alumnos necesitaron que se les organizaran los datos de la siguiente forma: “¿qué medidas utilizas en el sistema numérico decimal? ¿Qué medida utilizas para contar hasta el número 13?, ¿esta secuencia aumenta o disminuye, cuántas veces?, ahora utiliza la medida 3, ¿qué valor tendría el número 1 si usas medida 3?, ¿qué valor tendría el número 2 si usas medida 3?, ¿qué valor tendría el número 3 si usas medida 3?” Al mismo tiempo, se les iba escribiendo la relación entre estos datos, los alumnos prontamente comprendieron que requerían utilizar una multiplicación, algunos alumnos realizaron la multiplicación en plano verbal externo de forma inmediata, mientras que otros si necesitaron ir aumentando el número de tres en tres hasta el 13, también se observaron errores en el conteo, existieron respuestas adivinatorias (una alumna que hacia el cálculo en el plano verbal externo respondió: 28, 26, 43, 39). Sin embargo, todos los alumnos lograron identificar cuántas unidades y decenas hay en el número 13 con medida 3.

Específicamente, en las medidas de tiempo, todos los alumnos respondieron correctamente de forma reflexiva, describían sus respuestas de la siguiente forma “ $\frac{1}{2}$  hora es lo mismo, partimos un círculo  $\frac{2}{4}$  es un medio” “ $15 + 15 = 30$ , es lo mismo”. Aquí, los alumnos necesitaron de referentes concretos (un círculo). Sin embargo, en la conversión de medidas de peso tuvieron dificultades para identificar el uso de la operación correcta, requirieron de la repetición y conocer el valor de la

conversión. Además, fue posible observar que una vez que comprendían la relación entre las medidas, los alumnos continuaban cometiendo errores en el valor jerárquico del número, sumaban centenas con decenas. En la tabla 23, se presentan las respuestas a las tareas correspondientes al trabajo con sistemas de medida de peso, tiempo y otras bases.

Tabla 23. Respuestas de alumnos del colegio S sobre comparación de medidas

Pregunta	Respuestas	Respuestas incorrectas		Tipos de ayuda
		Tipo de error	Ejemplo	
¿Qué es más media hora o dos cuartos de hora?	son lo mismo	ninguno	ninguno	ninguno
En el sistema con medida 3, ¿cuántas unidades y decenas tendrían el número 13?	3 decenas y 9 unidades	Mantenimiento de la medida Conteo impulsivo Identificar operación	36/ 39	-Repetición del ejercicio -Explicación del sistema de medidas -Escritura de la relación entre sistema de medida 1 y 3
¿Cuántos gramos hay 3 kg?	3000 gramos	Valor posicional Ejecución de la operación (división)	6/ 3000 / 6000	-Repetición -Escritura de la conversión de la medida

Pregunta	Respuestas	Respuestas incorrectas		Tipos de ayuda
		Tipo de error	Ejemplo	
¿Cuánto kilogramos hay en 300 gramos?	3		3	-Escritura de la conversión de medida -Preguntas hacia la identificación de la relación matemática entre las medidas
¿Qué pesa más un kilogramo de algodón o un kilogramo de acero?	Algodón	-No identifican la medida	“aunque sea la misma cantidad, el algodón pesa más”	-Preguntas dirigidas hacia la identificación de la medida

Después de analizar los resultados de los alumnos del colegio S, es posible percibir que los alumnos no han formado el concepto de número, ellos identifican la característica de cantidad, requieren visualizar el número o elementos concretos para identificar su valor, confunden digito con número. Estos alumnos continúan en proceso de desarrollo, en el cual se requiere la formación de acciones que permitan identificar las características de medida y magnitud, así como el componente lógico. No obstante, los alumnos lograban realizar los cálculos sencillos de forma automatizada, intentando operar siempre en base 10, también, se esforzaban por realizar de forma mental dichos cálculos. Fue posible percibir que para ellos tenía un notable significado dar respuestas sin usar la escritura, el dibujo o el conteo verbal, ellos preferían usar solo sus dedos como apoyo.

### Colegio M

En relación con la primera tarea ¿qué es un número?, los alumnos de este colegio respondieron “es pues algo que equivale a una cosa o dos, ah y sirven para saber cuánto hay, cuánto es” “Algo que representa 1 cosa” “Una cantidad puedes saber cuánto llevas ahí”. En la tabla 24 podemos observar que los alumnos lograron identificar la cantidad de forma aislada, como características del concepto de número. También comentaron algunas relaciones matemáticas entre los números, como la suma, resta, división, multiplicación. Es posible percibir que las respuestas de los alumnos se relacionan con el componente matemático y su representación.

Tabla 24. Respuestas de los alumnos del colegio M sobre concepto de número

Preguntas	Respuestas	Ejemplos
¿Qué es el número? ¿Para qué sirven? ¿Qué números conoces?	Símbolo	Representa algo Equivale algo
	Uso	Contar, hacer cantidades, multiplicaciones, sumas, restas y divisiones

En relación con el sistema de medidas específicamente el numérico decimal, los alumnos identificaron el valor de la unidad, decena y centena observando el material bancubi y algunos mencionaron los materiales, por ejemplo, “una unidad es un cubito del banco Bancubi y es color rojo” “una decena son 10 perlititas juntas”. Sin embargo, los alumnos necesitaron de escribir el número y recordarles el valor con el material bancubi para identificar el valor de cada dígito. A partir de este apoyo los alumnos contestaron correctamente la siguiente pregunta (en el número 1597, ¿qué dígito vale más y cuál menos?), aunque se observaron algunas respuestas impulsivas, es decir, decían que el 9 era mayor. Es posible percibir que las respuestas de los alumnos dependían más de la imagen concreta y de las acciones con su material que de una base conceptual, asociaban el número con el color de su material o a la acción que realizan con este (juntar, unir, etc.). En la siguiente tabla

(25) se describen las respuestas de los alumnos, así como los tipos de ayuda que fueron necesarios.

Tabla 25. Respuestas de los alumnos del colegio M sobre el sistema numérico decimal

Pregunta	Respuestas Correctas		Respuestas incorrectas		Tipo de ayuda
			Ejemplo	Tipo de error	
¿Qué es una unidad?	Representa al uno	Uno es un cubito (perlita) en el banco	-----	-----	-----
¿Qué es una decena?	10 unidades	Juntas de 10 en 10			
¿Qué es una centena?	10 decenas o 100 unidades	El numero 100			
En el número 182, ¿qué dígito vale más?	1 mas	Son 100	“8 es más” “no sé qué es un dígito”	Valor posicional	-Escritura del número -Escritura del valor posicional de cada dígito
En el número 1597, ¿qué dígito vale menos? ¿Cuál vale más?	1000 vale más y 7 menos	1 vale un millar	“vale más el 9”		

En los casos de tareas que implicaban medidas de tiempo, los alumnos lograron identificarlas con ayuda del dibujo de su material Montessori (apoyo perceptivo concreto). Como producto de las observaciones de clases fue posible identificar de forma general las acciones trabajadas y los tipos de apoyo que las maestras otorgaban, así que se les pedía a los alumnos recordar sus clases y la forma en que usaban su material, en esta tarea de “¿qué vale más media hora o dos cuartos de hora?”, se les pedía a los alumnos recordar su material Montessori (círculos divididos en partes) y después dibujar dos círculos para que ellos dividieran a la mitad y en cuartos. También, se les solicitó colorear las partes indicadas en el enunciado (mitad y dos cuartos). La mayoría de los alumnos lograron identificar la igualdad entre estas medidas, aunque una alumna continuaba comentando que dos cuartos era más que una mitad. Por último, en el enunciado que implicaba la conversión de medidas (¿cuántos gramos hay en 3 kilogramos?), todos los alumnos requirieron que la investigadora les diera la cantidad de gramos que existe en un kilogramo (apoyo verbal externo-escritura). Algunos niños creían que un kilogramo tenía 100 o 10 gramos, sin embargo se le recordó la igualdad y esto fue suficiente para que ellos contestaran correctamente mediante el aumento desplegado de la medida. En la siguiente tabla 26 se presentan las respuestas correspondientes.

Tabla 26. Respuestas de alumnos del colegio M sobre sistemas de medidas

Pregunta	Respuestas Correctas	Respuestas incorrectas		Tipos de ayuda
		Ejemplo	Tipo de error	
¿Qué es más media hora o dos cuartos de hora?	son lo mismo	2/4 es más que 1/2	-Identificación de medida -Respuestas adivinatorias	-Explicación del valor y relación de las medidas -Dibujo del material Montessori
¿Cuántos gramos hay 3 kg?	3000 gramos	30/ 300/	- Desconocimiento de la medida -Respuestas adivinatorias	-Explicación del valor y relación de las medidas

Pregunta	Respuestas Correctas	Respuestas incorrectas		Tipos de ayuda
		Ejemplo	Tipo de error	
¿Qué pesa más 100 gr de algodón o 100 gr de acero? ¿La cantidad de algodón y acero sería la misma? ¿Por qué?		Acero es más pesado	Identificación de la medida	-Preguntas dirigidas hacia la identificación de la medida

En resumen, es posible considerar que estos alumnos continúan en desarrollo del concepto de número. A pesar de identificar la medida y la cantidad, estas son percibidas de forma aislada e incluso los alumnos se centran más en la cantidad. Además, los alumnos requieren del apoyo visual y manipulación de su material, a pesar de tener la posibilidad de intentar resolver las tareas sin el material, la mayoría prefería utilizarlo y corroborar sus resultados, ellos observaban constantemente su material, como si el material fuera a darles la respuesta. Esta conducta fue muy interesante, en ocasiones lograban en otras no. El tipo de ayuda principalmente fue la explicación y demostración para pasar de un plano concreto a una representación matemática. Sin embargo, no es suficiente para lograr el plano conceptual.

#### Colegio K

De forma general es posible observar que los alumnos de este colegio identifican las características esenciales del concepto de número. Los alumnos de este colegio refieren que el número “es como una palabra” “una cifra” “es como 1 o 2”. Además estos alumnos referían que el uso del número se relacionaba con el conteo directo e indirecto (cardinal), con la cualidad de orden (calendario, días), y para sacar resultados (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones) (ver tabla 27).

Tabla 27. Respuestas de los alumnos del colegio K sobre concepto de número

Preguntas	Respuestas	Ejemplos
¿Qué es el número?	Significado	Palabra
¿Para qué sirven? ¿Qué	Símbolo	Cifra

Preguntas	Respuestas	Ejemplos
números conoces?	Uso	Contar, (directo e indirecto), obtener resultados
	Número ordinal	Días de la semana

En relación con el sistema de medidas, concretamente el sistema numérico decimal, los alumnos lograron identificar el valor de la medida, su ubicación y comprarlas dentro del numero, solo un alumno tuvo un error de impulsividad, pero él mismo logró identificar su error y corregirlo mediante la escritura del número (ver tabla 28).

Tabla 28. Respuestas de los alumnos del colegio K sobre el sistema numérico decimal

Pregunta	Respuesta	Ejemplo	Respuestas incorrectas		Tipo de ayuda
			Tipo de error	Ejemplo	
¿Qué es una unidad?	Unidad vale 1	1 al 9	Ninguno	Ninguno	Ninguno
¿Qué es una decena?	10 cosas	Como el 10, 20, 30...			
¿Qué es una centena?	Algo que vale 100	100 en 100 hasta 900	Ninguno	Ninguno	Ninguno
En el número 182, ¿qué dígito vale más?	Vale menos (unidad)	2 por ser la unidad	Respuesta inmediata sin analizar los datos	El 8 (unidad) es mayor (CDU)	Corrección del propio alumno mediante la repetición activa de la pregunta
En el número 1597,	Vale mas	1 vale un millar	Ninguno	Ninguno	Ninguno

Pregunta	Respuesta	Ejemplo	Respuestas incorrectas		Tipo de ayuda
			Tipo de error	Ejemplo	
¿qué dígito vale menos?					

En tareas que implican otros sistemas de medida y su conversión, se pudo observar que los niños son capaces de obtener un número en base a otras medidas con apoyo de preguntas que se dirigen hacia la identificación de medidas y sus relaciones, así como la escritura de las secuencias correspondientes (medida base 1 y base 3). Por ejemplo, en la pregunta “en el sistema con medida 3, ¿cuántas unidades y decenas tendría el número 13?”, los alumnos necesitaron que el investigador organizará el análisis de los datos de la siguiente forma: “¿qué medidas utilizas en el sistema numérico decimal?, ¿qué medida utilizas para tener el número 13? ¿Cómo contaste para llegar a ese número? ahora utiliza la medida 3, ¿qué valor tendría el número 1 con medida 3?, ¿qué valor tendría el número 2?, ¿qué valor tendría el número 3?”

Al mismo tiempo de esa explicación, se escribía la secuencia numérica correspondiente (1, 2, 3, 4, 5... 13) y se mostraba la relación con el sistema de medida 3 (3, 6, 9, 12, 15... 39) para que los alumnos identificaran los valores de cada sistema de medida, es decir, el número 1 en sistema de medida tenía el valor de 3, y así consecutivamente. Esta explicación fue suficiente para que los alumnos identificaran la relación matemática entre esos sistemas de medida, ellos utilizaban rápidamente la multiplicación, solo un par de alumnos necesitaron escribir toda la secuencia para identificar cuántas unidades y decenas tenía el número 13 en sistema de medida 3.

Específicamente, durante la tarea de conversión de las medidas de tiempo, solo un alumno no logró responder de forma independiente y necesitó apoyo del dibujo para identificar el valor de cada medida. Este alumno refería que media hora es mayor que dos cuartos de hora porque media hora es la mitad de una hora. Al observar en

el dibujo de un reloj y dividirlo en cuatro partes, el menor pudo identificar que el valor es el mismo.

En la conversión de medidas de peso los alumnos lograron identificar el uso de la operación correcta. Un alumno no realizó el algoritmo de forma escrita y cometió un error en el resultado, una vez que se le solicitó verificar su resultado el menor corrigió su error.

Por último, fue posible observar que los alumnos no han generalizado la identificación de la medida. Ellos se centraron en el objeto sensorial más que en la medida y cantidad presentada. En la tarea de ¿qué pesa más 1 kg de algodón o un 1 kg de acero?, la mayoría de los alumnos respondían inmediatamente que el acero, porque es más pesado y el algodón muy ligero. Las ayudas verbales no fueron suficientes. Solo dos alumnos lograron responder de forma independiente. Estas respuestas las presento de forma resumida en la tabla 29.

Tabla 29. Respuestas de alumnos del colegio K sobre sistemas de medidas

Pregunta	Respuestas	Respuestas incorrectas		Tipos de ayuda
		Tipo de error	Ejemplo	
¿Qué es más media hora o dos cuartos de hora?	Media hora y dos cuartos de hora son lo mismo	Análisis de la medida (dos cuartos)	Media hora porque es la mitad de una hora	-Dibujo de un reloj y su división en cuatro partes
En el sistema con medida 3, ¿cuántas unidades y decenas tendrían el número 13?	3 decenas y 9 unidades	Mantenimiento de la medida	10	-Explicación de las medidas y sus relaciones -Escritura de las secuencias

Pregunta	Respuestas	Respuestas incorrectas		Tipos de ayuda
		Tipo de error	Ejemplo	
				numéricas
¿Cuántos gramos hay 3 kg?	3 kg dan 3000 gramos	“solo se me ocurrió” Impulsividad	Dan 10	-Explicación de la conversión de medida
¿Cuánto kilogramos hay en 300 gramos?	0.3 kilos dan 300 gr	Ejecución de la operación	3 kilos	-Explicación de la conversión de medida y análisis matemático
¿Qué pesa más un kilogramo de algodón o un kilogramo de acero?	Acero	No identificación de la medida	El acero es más pesado	-Preguntas dirigidas hacia la identificación de la medida

A partir de las respuestas, fue posible percibir que los alumnos identifican las características del concepto de número y se orientan en ellas para solucionar diversas tareas. Sin embargo, existieron errores en el cálculo y para mantener la medida. Estos errores fueron superados por los alumnos, en ocasiones de forma independiente y en otras requerían apoyo verbal escrito.

### **B. Solución de operaciones matemáticas**

A continuación se presentan los resultados del apartado de solución de operaciones matemáticas, las cuales incluían operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Las operaciones matemáticas se analizaron desde los cuatro componentes: componente espacial, lógico, matemático y simbólico. Las operaciones fueron

dictadas a los alumnos y se les pidió resolver cómo ellos necesitaran, podían ser de forma mental, hablar, escribir, dibujar o solicitar fichas.

La mayoría de los alumnos escribían las operaciones y resolvían conforme habían aprendido a desarrollar los algoritmos.

### Colegio S

En el colegio S se observó que la mayoría de los alumnos utilizaban cálculos automatizados y de forma verbal, sin embargo cometían errores de conteo, impulsividad, simplificaban de forma errónea (resolvían multiplicaciones con suma) y no lograban concluir los algoritmos o interpretar los resultados (división), así como no identificar los pasos necesarios en los algoritmos de multiplicación y división, además de no lograr convertir medidas en algoritmos de resta. Los alumnos necesitaron que se les organizaran los pasos de los algoritmos a partir de las características de la medida, por ejemplo, en la conversión de medidas en el algoritmo de resta (501-49), se les mostraba con tabla de grado la conversión de medidas de forma ascendente y descendente. En el algoritmo de multiplicación (102 x 73) los alumnos no lograban mantener el espacio correspondiente cuando se multiplica por la decena, al explicar las medidas y que los resultados corresponden a la medida aumentada, los alumnos comprendían y resolvían correctamente. No obstante, estos alumnos tenían cálculos mecanizados y lograban resolver de forma rápida operaciones sencillas, además, ellos practican “cálculo mental” durante su clase de matemáticas.

### Colegio M

Por otro lado, los alumnos del colegio M no realizaron este apartado, porque las maestras explicaron que ellos no han trabajado con algoritmos y solo pueden solucionar las operaciones con su material. Además, en este colegio no existe una tarea específica y aislada de resolver operaciones. Por lo anterior, se decidió observar esta solución en la tarea de problemas matemáticos. Los alumnos, una vez identificada la operación, la realizaban con el uso de los cubos. Primero formaban una cantidad, para lo cual algunos alumnos usaban la medida de unidades y otros directamente decenas o centenas.

### Colegio K

Por último, en el colegio K los alumnos lograron realizar los algoritmos de forma adecuada. La mayoría utilizó el algoritmo correspondiente de forma escrita solo un alumno intentaba resolver la mayor parte de los algoritmos de forma verbal, y también solo un alumno requirió del conteo con dedos, este alumno fue reportado por su maestra con dificultades de aprendizaje.

#### **C. Solución de problemas matemáticos**

Este apartado consistió de leer al alumno problemas matemáticos simples o complejos y solicitar que resolvieran, si necesitaban escribir, dibujar o preguntar por alguna palabra que no entendieran, podían hacerlo. En general esta tarea les agrado a los alumnos, la mayoría de los alumnos pedían que se les repitiera el problema y ellos hacían una repetición activa del mismo, cuando el problema era simple ellos repetían los datos pero cuando era complejo ellos repetían la mayor parte de la situación problemática. La tarea que más les gustó a los alumnos del colegio M y K fue la de redacción de problemas para sus compañeros, mientras que en el colegio S, los alumnos tuvieron dificultades para colaborar en esta tareas, ellos buscaban realizar problemas complejos para sus compañeros, mostrando cierta competencia entre ellos.

### Colegio S

En el colegio S fue posible percibir que en las tareas de solución de problemas simples los alumnos mostraron agrado. Inicialmente, algunos alumnos creían que no iban a poder resolverlos. Nuevamente, se observaron alumnos que solucionaban problemas simples con cálculo automatizados y en el plano verbal, solo decían el resultado o hacían el conteo en voz alta, por lo que los errores se mantuvieron en el conteo, selección de datos e identificación de la pregunta del problema. Para lo cual se les solicitó verificar sus resultados mediante la solución de algoritmos, paso por paso.

Específicamente en los problemas complejos, se observaron errores para identificar la medida y atender la pregunta final del problema. La explicación del problema, énfasis en la pregunta y ayuda del dibujo permitieron que los alumnos lograran solucionar estos problemas. Por otra parte, en los problemas sin solución, los

alumnos operaban con los datos sin atender la pregunta final, por lo que se requería repetir el problema y pedirles que ellos repitieran de forma activa el mismo, debido a que se observó que solo repetían los datos sin analizar la situación ni su relación con la pregunta final. Por último, el grupo de problemas simples, se observaron errores para identificar la relación de datos que implicaban multiplicación y división, los cuales simplificaban y solucionaban con suma o resta directa ( $60-4$ , en lugar de  $60/4$ ;  $7 + 10$ , en lugar de  $7 \times 10$ ). Además, en todos los problemas se observaron errores para concluir algoritmos, verificar resultados e identificar el valor posicional.

En el siguiente problema complejo (Tabla 30) la mayoría de los alumnos lograron resolver de forma verbal externa, ellos expresaron que conocieron cuántos gramos equivale un kilogramo porque ya habían resuelto tareas semejantes en el apartado de sistemas de medidas (apartado del protocolo de evaluación). Los alumnos describían la secuencia de operaciones “ $1000+2000+ 300$  son  $3300$ ”, aunque algunos cometían errores para realizar esa suma, principalmente para incluir las centenas. Este error también se observó cuando los alumnos escribían los datos y querían solucionar la operación, ellos confundían su valor jerárquico.

Tabla 30. Solución de problema que implica una conversión de medida y suma

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Renata y Daniel fueron al mercado y compraron lo siguiente: 2 kilos de manzana, 300 gramos de azúcar y 1 kilo de pasta, ¿cuántos gramos compraron en total?	603  6000	Identificar la medida  Valor jerárquico del número  Organizar datos en el algoritmo	Explicación del uso de la medida  Escritura de la conversión y organización de datos

En el siguiente problema simple (Tabla 31) que contenía datos de diferentes sistemas de medida, los alumnos del colegio S igual en su mayoría intentó resolver

de forma verbal descrita, al no conseguir escribieron el algoritmo, pocos alumnos lograron resolver de forma independiente esta operación. Los alumnos necesitaron que se les orientara tanto en acciones generales para analizar el problema (identificación de la pregunta final, de los datos) así como en la solución del algoritmo. Los alumnos tuvieron dificultades para organizar los datos en el algoritmo y para resolverlo, ellos confundían el lugar que correspondía al resultado que iban encontrando (cociente), en otros casos no ubicaban correctamente los dígitos (dividendo), y en otras ocasiones los alumnos confundían los resultados de la tabla de multiplicar. Fue posible observar que los alumnos tenían un discurso que no les permitía realizar acciones matemáticas, ellos operaban sin comprender la lógica de los datos, es decir, de las relaciones entre los datos, se podría decir que operan con un número absoluto. Algunas frases que se identificaron que obstaculizaban eran “¿el 8 cabe en el 9?” “tengo que encontrar un número multiplicado por 8 que me de 98”, aunque esta última se encuentra en el nivel operativo, el alumno no comprendía la relación de multiplicación con división, él expresaba que la multiplicación es opuesta a la división.

Tabla 31. Solución de problema con datos de diferente medida

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Un tren avanzó 98 km durante 8 horas. ¿Cuántos kilómetros hace el tren en una hora?	48 11	-Comprensión de la relación entre los datos -Impulsividad -Dificultad para atender pregunta final -Conteo estimación -Organización de los datos en el	Dibujo de un esquema para explicar la relación entre los datos Repetición del problema Explicación de la relación lógico-matemática de los datos Organización del algoritmo

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
		algoritmo -Verificación de resultados	de forma escrita

En la siguiente tabla (32) se muestra un problema en el que los datos no se relacionan con la pregunta final, por lo que no tiene solución. Solo dos alumnos lograron identificar que el problema no tenía solución porque faltaba un dato, uno de ellos expresó “¿cómo voy a saber? es que no me da un dato de los automóviles, no se sabe”. Los demás alumnos necesitaron de la orientación sobre la pregunta final y la situación del problema mediante preguntas reflexivas como: ¿cuál es la pregunta del problema? ¿Qué información necesitas conocer para poder contestar esa pregunta? ¿Esa información está contenida en la situación del problema? Recuerda ¿de quién se habla y qué se dice en la situación del problema?

Tabla 32. Problema sin solución

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Durante 12 días se construyó una carretera de 48 kilómetros, ¿cuántos carros pasaron durante un día?	48/12 48/1 12+48	Comprensión de la relación entre los datos Comprensión de la pregunta final	Repetición del problema Preguntas dirigidas hacia el análisis del problema (pregunta final, identificación de datos, relación entre datos)

El siguiente problema del protocolo implicaba la operación de división, en el que se incluye de forma directa una característica de esta operación (repartición). Algunos alumnos lograron solucionar a partir del algoritmo, más tuvieron dificultades para concluir el algoritmo (resto), otros alumnos utilizaron la multiplicación para saber la respuesta, se ayudaron con el conteo de sus dedos. Los tipos de apoyo que están descritos en la tabla 33 permitieron que los alumnos comprendieran los pasos del algoritmo.

Tabla 33. Problema que implica una acción de división

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
La biblioteca “El Principito” tiene 40 libros repartidos en 5 estantes. Si la Maestra Lupita coloca la misma cantidad de libros en cada estante, ¿cuántos libros hay cada estante?	160 200	-Concluir el algoritmo -Ubicación del dígito -Simplificación	-Organización del algoritmo de forma escrita -Explicación de los elementos del algoritmo -Repetición del problema

En la solución de problemas que incluye la operación de multiplicación solo dos alumnos lograron responder correctamente de forma verbal descrita, mientras que la mayoría realizó una operación inmediata, suma de  $7 + 3$ , otros mostraron dificultades en la estimación de cálculos. La ayuda de repetición del problema y la representación de las relaciones entre los datos permitió que los alumnos lograran resolver el problema. Los tipos de error y apoyos están descritos en la siguiente tabla 34.

Tabla 34. Problema que implica una multiplicación

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Gaby tiene tres veces más la edad de su hermana Sofía. Si Sofía tiene 7 años, ¿cuántos años tiene Gaby?	10 28 16 20	Impulsividad Ensayo y error Relación entre los datos Simplificación Conclusión del algoritmo	Repetición Explicación de la relación entre los datos de forma desplegada Organización del algoritmo

El siguiente problema implicó la acción de división (Tabla 35), en el cual se solicita la cantidad de veces que disminuye una medida (4) en una magnitud dada (64). El enunciado incluye “veces menos” y la mayoría de los alumnos realizó una resta directa, otros tuvieron dificultades para organizar el algoritmo (cociente) y repetían el número 1. Solo un alumno logró identificar la operación pero respondió que no sabía la razón por la que había decidido usar la división, pero que suma, resta o multiplicación no eran necesario aplicarlas.

Tabla 35. Problema que implica una acción de división

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
En el museo del niño, la primera sala tiene 64 actividades lúdicas y en la segunda hay 4 veces menos, ¿cuántas actividades lúdicas hay en la segunda sala?	60  116	-Relación entre los datos  -Conclusión del algoritmo	-Explicación de la relación entre los datos  -Repetición  -Organización del algoritmo

El siguiente problema consistía en un problema complejo (Tabla 36), debido a que consistía de dos operaciones matemáticas, además incluía una pregunta nominativa, para la cual había que realizar operaciones matemáticas. Los alumnos necesitaron de escribir los datos y resolver los algoritmos. El tipo de error más frecuente fue para organizar los datos, la mayoría de los alumnos quería resolver de forma verbal externa descriptiva, y tenían errores de cálculo.

Tabla 36. Problema complejo que implica suma y resta

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Axel y Daniel jugaron tres rondas de penales. Si en la primera ronda quedaron 20 a 18 goles, en la segunda 35 a 20 y en la	Axel  54	-Organizar los datos  -Estimación de resultados	-Repetición  -Organización de datos de forma escrita

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
última 15 a 50, ¿quién ganó? ¿Por cuántos goles ganó?			

El último problema que fue redactado para los alumnos consistió de una acción de disminución, los alumnos no tuvieron dificultad para esta operación, sin embargo no respondían la pregunta del problema, ellos solo decían el resultado de la operación.

La siguiente tarea de este apartado era la redacción de problemas de acuerdo con datos dados por el investigador y creación de problemas propios (tabla 37). Se presentan los problemas igual que los alumnos los redactaron en las hojas de evaluación. Se puede observar que el alumno 3 no mantuvo los datos proporcionados, mientras que los alumnos 1, 3, 4, 6, y 8 relacionan los datos con la pregunta final. En este tipo de datos solo un alumno no logra redactar un problema, solo plantea una pregunta.

Tabla 37. Tarea de redacción de problemas por los alumnos del colegio S

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
1	Mi prima construyó 3 metros de plastilina en 59 minutos ¿cuánto se tardó en hacer un metro?	Mi mamá tiene 8 pesos, si en su cumpleaños yo le regalo 60 pesos y en su trabajo gano 400, ¿cuánto dinero tiene ahora?	Yo tenía 100 tazos en una partida perdí 47 y compre una bolsa con 30, ¿cuántos tengo ahora?
2	Su mamá de Paula la dega ver la jugar 18 minutos y correr 3 metros ¿hace ejercicio o esta jugando)	Paula le gustan las maticas y la maestra le puso unos probles sitiene 18 platanos 6 naranjas y 4 guallabas ¿cuánta fruta tiene?	Si Maria tiene $\frac{3}{4}$ de liston negro y Lucia $\frac{5}{4}$ ¿quién tiene mas liston?

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
3	Jose tiene que construir una barrera de 3 metros en 59 minutos ¿en cuantos minutos tendria que costruir un metro?	Daniel tiene 460 estampas pero 18 no son diferentes son repetidas ¿cuántas estampas tendria sin contar las repetidas?	Juan tenia un cuarto de leche y su abuela compró tres cuartos de leche ¿cuántos cuartos de leche hay en la casa de Juan?
4	Juan recorrió 3 metros en 59 minutos ¿cuánto recorrió en un metro?	Manuel descargo un juego se tardó 18 segundo descargar 6 minutos en poner sus datos y cuatro horas en jugar ¿cuánto se tardó en total?	Pablo tenía 800 tazos y su mama le regalo 200 y perdio 339 ¿cuántos tazos le sobraron?
5	¿María recorre 3 metro en 59 horas?	¿Javier con 4 centenas de maiz y 18 unidades de frijol y decenas de cebolla?	¿Juan tiene \$440 y se quiere comprar cánicas que cuestan \$20 ¿cuánto le sobra de dinero?
6	Azul corio 3 metros y se tardó 53 minutos ¿Cuánto cantidad sería si corriera 2 beses más?	Jimena fue al mercado y compro 18 fresas 6 duraznos y 4 mangos ¿cuánto compro?	Emiliano tenía 18 caros y Sebastian 5, ¿cuántos carros necesita Sebastián para alcanzar a emiliano?
7	Ándres hace ejercicio durante 59 minutos si el mide 3 metros de ¿cuánta altura es el gimnasio?	lalo tiene \$1864 se le perideron \$64 ¿cuánto le queda?	Maria tiene 63 huevos y le regalaron 3 huevos mas, si se comio 6 huevos en una semana ¿cuántos huevos le quedan?

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
8	Ariz recorrió 3 metros en 59 minutos ¿en cuanto tiempo recorre 1 metro?	Laura hizo una operación que tenía 18 unidades 6 decenas y 4 centenas ¿cuál es ese número?	Maya tenía 530 dulces y regalo 325 ¿cuánto le quedan?

En seguida se describen las respuestas, tipos de errores y de ayuda que se obtuvieron durante la evaluación de solución de problemas con los alumnos del colegio M.

### Colegio M

El primer problema tiene la estructura de forma indirecta, conversión de medidas mediante el aumento de esta y la pregunta final pide aumentar las cantidades, por lo que operación aritmética es de suma. Los alumnos tuvieron dificultad para atender la pregunta final, la medida de los datos y operaron directamente, por lo que sus respuestas fueron 6000, comentando que  $2 + 3 + 3 + 1$  son 6, pero como eran kilos la suma era en miles. Otra alumna comentó que  $5 \times 2$  es 6, confundiendo la operación de multiplicación con suma. Un error más se observó al momento de organizar los datos y sumarlos, un alumno refirió que  $2000 + 300 + 1000$  era 3030, al ayudarlo a escribir los números y ubicarlos correctamente el alumno logro responder. Todos los alumnos requirieron de la repetición del problema y solicitarles la comprensión de la pregunta final. Después de dar las ayudas mencionadas los alumnos respondieron correctamente, aunque ellos solo daban respuestas a las operaciones, no contestaban la pregunta final (tabla 38).

Tabla 38. Solución de problema que implica una conversión de medida y suma

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Renata y Daniel fueron al mercado y compraron lo	60	Dificultad para analizar los	Repetición del problema

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
siguiente: 2 kilos de manzana, 300 gramos de azúcar y 1 kilo de pasta, ¿cuántos gramos compraron en total?	6000 3000 3370 3030	datos  Identificar la medida  Valor jerárquico del número	Escritura de la conversión y organización de datos

El siguiente problema implicaba datos con diferentes medidas, en la tabla 39 se muestran algunas respuestas de los alumnos.

Tabla 39. Solución de problema con datos de diferente medida

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Un tren avanzó 98 km durante 8 horas. ¿Cuántos kilómetros hace el tren en una hora?	11 y sobran 2 2 km 1 km	Comprensión de la relación entre los datos  Verificación de resultados	Dibujo de un esquema para explicar la relación entre los datos  Repetición del problema  Recuerdo de la tabla de división (materia Montessori)

En el problema anterior todos los alumnos requirieron del dibujo de un esquema y la explicación de este. Dos alumnas y un alumno tuvieron dificultad para comprender la relación entre los datos, por lo que sus respuestas fueron 2 km y 1 km, adivinando el resultado. Una alumna y un alumno lograron comprender y resolver el problema mediante la acción de división, así como recordando el uso de la tabla de división (material Montessori). Su proceso de solución fue de estimación de resultados, por ejemplo,  $11 \times 8$ ,  $18 \times 8$ , y  $9 \times 10 = 90$   $9 \times 2 = 18$ ,  $90 + 18 = 98$ , este procedimiento el menor lo hacía de forma verbal, usando los cubos bancubi y los dedos.

En la tabla 40 se muestra un problema en el que los datos no se relacionan con la pregunta final, por lo que no tiene solución.

Tabla 40. Problema sin solución

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Durante 12 días se construyó una carretera de 48 kilómetros, ¿cuántos carros pasaron durante un día?	5  12  Depende de cuánto cemento estén poniendo	Comprensión de la relación entre los datos  Comprensión de la pregunta final	Repetición del problema  Preguntas dirigidas hacia el análisis del problema (pregunta final, identificación de datos, relación entre datos)

En este problema los alumnos tuvieron dificultades principalmente para atender la pregunta final, al ser parecido en contenido al problema anterior (tren que viaja 98 km en 8 horas) algunos alumnos intentaron operar con los datos. Otros alumnos reflexionaban sobre el problema y pedían que se repitiera el problema. Una alumna

comentaba que no era posible porque la carretera está en construcción. Después de que la investigadora realizara preguntas dirigidas hacia la identificación de la pregunta final, los datos y la relación entre estos, los alumnos comprendieron que no tenía solución.

La tarea siguiente era un problema que consistía en repartir una cantidad de libros en estantes (Tabla 41). Los alumnos solicitaron el apoyo de su material bancubi. La mayoría intentó repartir en decenas, pero al identificar que no era suficiente, decidieron utilizar los cubos como unidades. Todos los alumnos escribían el número 1 cinco veces para representar los estantes. Además su repartición era por unidades, aunque algunos intentaron iniciar desde cinco y de ahí repartir 1 en 1.

Tabla 41. Problema que implica una acción de división

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
La biblioteca “El Principito” tiene 40 libros repartidos en 5 estantes. Si la Maestra Lupita coloca la misma cantidad de libros en cada estante, ¿cuántos libros hay cada estante?	6 7	Adivinación de resultados  Dificultad en el análisis de datos	Uso de material bancubi  Dibujo de los estantes  Repetición

El siguiente problema que se trabajó fue un aumento de una medida cierta cantidad de veces. En la tabla 42 se describen algunos resultados. El principal error de los alumnos fue operar con los datos de forma directa, es decir, solucionaban con una suma,  $7 + 3 = 10$ . El apoyo que les aportó para comprender la relación de los datos fue la repetición, la orientación con el uso de su material bancubi (recuerda son 7 unidades, puedes acomodarlas como te han enseñado, un edificio de siete por 1 de ancho). Otro error observado fue la estimación de resultados, una alumna aumentaba la medida 7 con ayuda de sus dedos, pero al hacerlo por segunda vez

(14) empezó a aumentar 14 más, por lo que su resultado era 28 años, la repetición y dirección hacia la medida permitió que contestara correctamente.

Tabla 42. Problema que implica una multiplicación

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Gaby tiene tres veces más la edad de su hermana Sofía. Si Sofía tiene 7 años, ¿cuántos años tiene Gaby?	10  28	-Dificultad para analizar los datos  -Adivinación de resultados	Material bancubi  Repetición

La tarea siguiente fue un problema que implicaba una disminución de la misma medida (resta). En este problema los alumnos solo tuvieron dificultades en el conteo, cuando utilizaban sus dedos, mientras los alumnos que utilizaron los cubos daban la respuesta correcta. El tipo de apoyo fue la repetición del problema y se les solicitó verificar sus resultados. Después de esto, los alumnos respondían correctamente, aunque de forma incompleta, solo decían la cantidad de bombones, pero no respondían la pregunta.

La última tarea solicitada a los alumnos fue la redacción de problemas. La mayoría de los alumnos mostraron agrado en esta tarea, pero no les gustaba escribir mucho, aunque solo una alumna aceptó que la investigadora lo escribiera por ella. El problema que más se les dificultó fue la redacción mediante datos dados, en el cual solo mencionaban los datos sin dar una relación entre ellos. A continuación, se muestran estos problemas (ver tabla 43).

Tabla 43. Tarea de redacción de problemas por los alumnos

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
1	3 reglas de 3 metros en 59 minutos me tardo midiendo las	Si tengo 18 helados y me quitan 6 helados y	Si mi papá tiene 172 dulces y mi mama le regala 129 y yo le regalo

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
	tres reglas cuantos minutos	me regalan 4 helados	111
2	Si tengo un chocolate de 3 metros y me la como en 29 y 30 segundos, ¿cuántos me tardaré en comer 2 barras de chocolate?	Si tengo 36 colores, y tengo 6 latas y traigo 30 colores, ¿cuántos tengo total?	
3	Si tienen que medir en 59 minutos 5 barcos cada 3 metros ¿Cuántos minutos te da si mides 10 barcos?	Si le piden 18 unidades, 6 decenas 4 centenas ¿cuanto es en total?	Si tengo 1000 bombones y se comen 99 ¿Cuántos cedan?
4	Si maria recorrio 3 metros en 59 minutos cuantos metros ago en 69 minutos	Si ai 2000 bolitas en una caja y me dan otra caja con 1000 bolitas y juntas las cajas pero al siguiente dia abri otra caja con 1000 cuantas bolitas tengo	Si yo estoi trabajando en el banco y diana me pide la cantidad de 18 unidades, 6 decenas 4 centenas mas 1 unidad mas 7 decenas mas 5 centenas y las tengo que juntar que cantidad me da
5	si Yolanda corrió 59 minutos y diana corrió 3 metros,	Si Sarah tenia 18 unidades y Aldonsa tenia 6 decenas y nos	Si en mi casa se comieron mis galletas y en el paquete abia 30 galletas y

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
	¿quien fue la que corrió mas?	reparten 4 centenas, ¿quién se lleva mas?	sobraron 7 cuantas galletas se comieron

Para finalizar el apartado de evaluación de solución de problemas en los alumnos, describimos los resultados de los alumnos del colegio K.

### Colegio K

En el primer problema que fue complejo (conversión) la mayoría de los alumnos utilizaron el algoritmo para solucionar. Ellos conocían el valor de la conversión de la medida de peso. Solo un alumno operó de forma inmediata con los datos, es decir, realizó la suma del número 3 (300 gr) mas 2 (2kg) y dijo como resultados 5 gramos y 1 kilo. Este alumno fue quién necesitó del apoyo perceptivo esquemático por parte de la investigadora en la mayoría de los problemas y es quién fue referido con problemas de aprendizaje por la maestra de grupo. Con los apoyos descritos en el tabla (44) este alumno logro organizar el algoritmo de suma y responder correctamente.

Tabla 44. Solución de problema que implica una conversión de medida y suma

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Renata y Daniel fueron al mercado y compraron lo siguiente: 2 kilos de manzana, 300 gramos de azúcar y 1 kilo de pasta, ¿cuántos gramos compraron en total?	5 gramos y 1 kilo	-Identificar la medida -Relación entre los datos	Explicación del uso de la medida y relación entre datos Escritura de la conversión y organización de datos

En el siguiente problema (tabla 45) que implicaba una división con medidas que perteneces a sistemas de medición diferentes, los alumnos lograron identificar la relación entre los datos y solucionar el algoritmo de forma correcta, aunque, solo dos alumnos requirieron de que se les dibujara un esquema para mostrar dicha relación entre los datos, debido a que ellos no lograban explicar cuál era esa relación. Este esquema, junto con la explicación correspondiente, permitió que ellos comprendieran el problema y pudieran responder la pregunta del problema de forma completa.

Tabla 45. Solución de problema con datos de diferente medida

Problema	Respuestas incorrectas	Tipo de error	Tipos de apoyo
Un tren avanzó 98 km durante 8 horas. ¿Cuántos kilómetros hace el tren en una hora?	Dificultad para explicar su resultado	-Comprensión de la relación entre los datos	Dibujo de un esquema para explicar la relación entre los datos  Repetición del problema

El problema siguiente consistía en no tener solución, debido a que la información de la pregunta final del problema no se presentaba en la situación del problema. Los alumnos necesitaron repetir de forma activa para ellos el problema, expresaban su búsqueda de los datos, la pregunta final y su situación, posterior a esto, ellos comentaban que no era posible solucionar “no se puede hacer” “ninguno” (carros) “sin solución”. Aunque tuvieron que repetir más de una vez y reflexionaban constantemente, solo dos alumnos actuaron de forma impulsiva y utilizaron el algoritmo de división, por lo que requirieron de la repetición del problema y explicación conjunta de la relación entre los datos.

Para el siguiente problema (La biblioteca "el principito tiene 40 libros repartidos en 5 estantes. Si la maestra Lupita coloca la misma cantidad de libros en cada estante, ¿cuántos libros hay en cada estante?), que incluye una división con su característica

de repartición en iguales, los alumnos resolvieron mediante el uso del algoritmo de la división de forma independiente, solo un alumno requirió que se le realizara un dibujo esquemático para que él comprendiera la relación entre los datos del problema. Sin embargo, este alumno no dio respuestas incorrectas porque él solicitó el apoyo después de leer un par de veces de forma activa el problema.

En el problema sobre multiplicación (Gaby tiene tres veces más la edad de su hermana Sofía. Si Sofía tiene 7 años, ¿cuántos años tiene Gaby?) También los alumnos resolvieron de forma independiente y correcta, explicaban que 7 era la medida y se aumentaba tres veces. No obstante, un alumno cometió un error en el cálculo y refirió como respuesta 16, posterior a la escritura del aumento de 7 tres veces, este alumno corrigió su resultado.

El siguiente problema implicó la acción de división (En el museo del niño, la primera sala tiene 64 actividades lúdicas y en la segunda hay 4 veces menos, ¿cuántas actividades lúdicas hay en la segunda sala?) Todos los alumnos respondieron correctamente, un alumno escribió la secuencia numérica de medida 4, otros alumnos usaron el algoritmo, uno más necesitó sus dedos para aumentar esta medida, y un último requirió del apoyo para comprender los datos.

El siguiente problema consistía en un problema complejo (Axel y Daniel jugaron tres rondas de penales. Si en la primera ronda quedaron 20 a 18 goles, en la segunda 35 a 20 y en la última 15 a 50, ¿quién ganó? ¿Por cuántos goles ganó?), aquí los alumnos también respondieron de forma correcta, tanto la respuesta nominal como la cantidad de diferencia entre los datos. Los alumnos necesitaron escribir los datos y resolvieron con el algoritmo correspondiente.

En el último problema que les daba consistía en realizar una acción de disminución, todos los alumnos respondieron correctamente, aunque algunos solo mencionaron el resultado de la operación (8), con la repetición y orientación lograron responder de forma completa (8 chocolates se comieron).

La siguiente tarea consistía en la redacción de problemas a partir de datos (tabla 40), en el primer caso (59 minutos y 3 metros), todos los alumnos descartaron la posibilidad de aumentar o disminuir las cantidades debido a que no tienen la misma medida, por ejemplo, la alumna 3 redactó: “un ciclista avanzó en 59 minutos 3

metros, ¿cuántos metros avanzó en 20 minutos?, mientras en el segundo caso (18 unidades, 6 decenas y 4 centenas), lograron identificar que era posible utilizar las operaciones de suma y resta debido a que las medidas eran parte del sistema numérico decimal, por ejemplo, el alumno 5 redactó: “Hay una granja con 18 ovejas, 60 gallinas y 400 caballos, ¿cuántos animales hay en total”.

Por último, en la redacción libre de problemas, solo dos alumnos plantearon la relación entre datos como de reparto (división), tres alumnos utilizaron la operación de suma y solo uno la de multiplicación. La situación que plantearon se relacionaron con medidas de tiempo (alumno 1), cálculo de un total (alumnos 3, 4, 5), repartición de objetos (alumno 6), cálculo de una distancia (alumno 7), y compra-venta (alumno 2). En relación con los eslabones de la estructura psicológica de la solución de problemas se encontró: 1) pregunta final, los alumnos lograron tener una pregunta del problema relacionada con los datos, 2) análisis de datos, ellos identificaron la relación que pueden tener los datos a partir de la medida, 3) elección de operación, además de identificar los nexos entre los datos, los alumnos lograron relacionarlos a la operación aritmética adecuada. No obstante, se identificaron algunos errores en la combinación de la medidas (ver alumno 7 en tabla 46). Por último, en esta tarea todos los alumnos mostraron un agrado, se esforzaron por inventar una situación y propusieron que sus compañeros lo resolvieran.

Tabla 46. Tarea de redacción de problemas por los alumnos

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
1	Un ciclista avanzó en 59 min 3 metros, ¿cuántos metros avanzó en 20 minutos?	Lupita tiene 18 galletas de marínela, 16 decenas de galletas de chocolate y 4 centenas de galletas de vainilla, ¿cuántas galletas tiene ahora?	Juan se durmió a las 9:45 pm. Y se despertó a las 6:50 am, ¿cuántas horas durmió Juan?
2	Alex hizo un barco en 59 min que medía 3 mts, ¿cuántos barcos	German Tiene 18 unidades de carne, 6 decenas de sopa y 4	Kyran quiere comprar 128 carritos, pero cada

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
	le alcanzara hacer en 59 minutos?	centenas de tortillas, ¿a cuánto equivale nueve unidades? ¿A cuánto equivale 3 decenas? ¿Cuánto equivalen dos centenas?	uno cuesta \$20, ¿cuánto va a pagar?
3	Un auto avanzó 3 metros en 59 minutos. ¿Cuánto avanzó en una hora?	Isa tiene 6 decenas de tarjetas, 4 centenas de tarjetas y 18 unidades. ¿Cuántas tarjetas hay en total?	Alex compró 100 tarjetas de minecraft, 800 de plantas vs zombis y 400 de dragón ball, ¿cuántas tarjetas hay en total?
4	Diego y su pa' fueron a pasear por un parque lleno de 54 minutos de recorrido 2 metros de extensión. ¿Cuántos dinosaurios hay en total si son 3 metros de extensión?	Isa y Misha fueron a la juguetería y compraron lo siguiente: 18 unidades de Bacugan y 6 decenas en las tarjetas y 4 centena de juegos de video, ¿cuántos productos compraron en total?	Toño y Misha fueron a jugar en el parque y encontraron 18 juegos y 1 juego de mesa, ¿cuántos juegos hay en total?
5	Hay una carrera de 59 minutos. Si cada vuelta es de 3 metros. ¿Cuántos metros hay?	Hay una granja con 180 ovejas, 60 gallinas y 400 caballos. ¿cuántos animales hay en total?	En el colegio Kepler los 7 niños de tercero de primaria llevaron 6 libretas y 30 libros. ¿Cuántas libretas y

Alumno	Datos dados		Propio
	59 minutos, 3 metros	18 U, 6 D y 4 C	
			libros hay en total?
6	Adrián armó un lego de 59 piezas si lo armó en 3 minutos, ¿cuántos segundos se tardó?	Diego tiene 18 armas de Halo, 60 armaduras de Halo y 400 muñecos, ¿cuánto tiene en total?	Isa Tiene 200 dinosaurios si los repartirá entre 5 niños, ¿cuántos dinosaurios le toca a cada niño?
7	Kyran recorrió 3 metros en 59 minutos, ¿cuántos recorrió en una hora?	Adrián compró 18 manzanas, 60 moscas y 400 arañas, ¿cuántas cosas compró?	Diego recorrió 32 km en 9 segundos. ¿Cuánto recorrió en 1 segundo?

En la siguiente tabla mostramos las características del desarrollo conceptual y solución de problemas de los alumnos (tabla 47).

Tabla 47. Conceptos y habilidades matemáticas de los alumnos

Colegio S	Colegio M	Colegio K
Ausencia de concepto de número	-Identificación de la cantidad.	Concepto de número

Colegio S	Colegio M	Colegio K
<p>Solución de algoritmos matemáticos. Dificultad en las acciones de comparación y conversión de medidas</p>	<p>Identificación y comparación de sistemas de medidas con apoyo del material bancubi</p>	<p>Acciones de comparación y conversión de medidas, aunque aún no se consolida la comparación de medidas de tiempo.</p>
<p>Estrategia de estimación de resultados (ensayo y error), conteo con dedos.</p>	<p>Solución de problemas que implican aumento de una medida, disminución y repartición con apoyo del material bancubi.</p>	<p>Solución de operaciones matemáticas en acciones verbales y solución de algoritmos.</p>
<p>Solución de problemas a partir de la identificación de datos y la operación. Respuestas sobre las operaciones matemáticas</p>	<p>Dificultad para atender pregunta final y relacionar los datos en los problemas que implican más de una acción matemática o relaciones que no se perciben de forma directa (km/h). Uso del material para resolver los problemas.</p>	<p>Solución de problemas matemáticos de forma reflexiva y operativa (en ocasiones no atienden la pregunta final)</p>

Para concluir este capítulo, describimos los elementos del método de enseñanza de cada colegio, como síntesis de los resultados presentados anteriormente.

## 5.2 Método de enseñanza del colegio S

### Colegio S

El colegio S tuvo las siguientes cualidades (tabla 48), percibimos que se trata de un método de enseñanza que tiene como objetivo el desarrollo del componente matemático (operaciones aritméticas), por lo que la orientación es dependiente, particular e incompleta. Las acciones se dirigen hacia objetivos operativos, de forma aislada. La colaboración positiva se observa entre maestra- alumno. Los alumnos han desarrollado habilidades de cálculos automatizados, además de intentar la estimación de resultados y resolver en menor tiempo posible.

Tabla 48. Método de enseñanza del Colegio S

Elementos de método de enseñanza	Características del colegio S
Sistema de conceptos	Empíricos
Orientación	Dependiente Particular en matemáticas General en tareas no propias de las matemáticas (dibujar, copiar) Incompleta
Sistema de acciones	Verbales externas (solución de algoritmos) Automatización de cálculos simples
Forma de interacción	Alumno-objeto: solo acciones perceptivas, números impresos. Alumno-alumno: verificación de resultados. Maestra-alumno: explicación del tema, incitación de respuestas, repetición.
Actitud	Agrado y participación de los alumnos Agrado y preocupación por la solución de aprendizaje de los alumnos
Alumnos	-Ausencia de concepto de número -Solución de operaciones matemáticas de suma y resta de forma automatizada -Estrategia de estimación de resultados (ensayo y error),

Elementos de método de enseñanza	Características del colegio S
	conteo con dedos. -Dificultades para explicar sus resultados -Solución de problemas matemáticos de forma operativa (algoritmo) -Tareas con mejor rendimiento en el componente operativo, dificultades en el componente simbólico.

### 6.3 Método de enseñanza del colegio M

#### Colegio M

En la siguiente tabla (49) mostramos las características del método de enseñanza del colegio M. Este método se caracteriza por desarrollar conocimiento matemático a partir de lo que el alumno pueda comprender de su percepción directa con los objetos. La orientación es incompleta, particular y dependiente, pero dependiente el material, los alumnos solicitan su uso para realizar sus ejercicios matemáticos. Las acciones se relacionan con un tipo de tarea pero en su nivel asociativo con su material, es decir, primero construyen con los cubos un modelo, después dibujan este modelo y responden preguntas en relación con los números. La colaboración positiva se observó en los tres niveles propuestos, maestra-alumno, alumno-alumno y alumno-objeto, además fue posible percibir una adecuada comunicación emocional.

Tabla 49. Método de enseñanza del Colegio M.

Elementos del método de enseñanza	Características del colegio M
Sistema de conceptos	-Empíricos dependientes de la presencia constante del material -Definiciones
Orientación	-Incompleta -Particular -Dependiente
Sistema de acciones	Materiales (cubos de bancubi y material Montessori) Perceptivas (dibujo concreto)

Elementos del método de enseñanza	Características del colegio M
	Verbales externas (solución de desafíos, escritura de números)
Forma de interacción	<p>Alumno-objeto: acciones de identificación, comparación, medición, aumento con cubos.</p> <p>Alumno-alumno: solución de tareas conjuntas, verificación de resultados, apoyo.</p> <p>Maestra-alumno: explicación del tema, acompañamiento-reflexión-observación.</p>
Actitud	<p>Agrado y participación de los alumnos</p> <p>Agrado hacia las matemáticas, aunque se perciben con difíciles, esto ocasiona preocupación en dos alumnas.</p>
Alumnos	<p>Identificación de las características del concepto de número: medida y la cantidad.</p> <p>-Identificación y comparación de sistemas de medidas con apoyo del material bancubi</p> <p>-Solución de problemas que implican aumento de una medida, disminución y repartición con apoyo del material bancubi.</p> <p>-Dificultad para atender pregunta final y relacionar los datos en los problemas que implican más de una acción matemática</p>

#### 5.4 Método de enseñanza del colegio K

##### Colegio K

En la tabla (50) describimos las características del método de enseñanza del colegio K. Nos fue posible identificar un método que usa conceptos, con una orientación completa, generalizada e independiente. Las acciones contienen el conocimiento matemático y su aplicación es en diversos planos (materializada, perceptiva, escritura, descriptiva verbal), no observamos directamente tareas propias para las acciones mentales, más los alumnos logran su mayor parte de ejecución describir y explicar sus acciones. Los tipos de colaboración fueron positivos en los tipos planteados: maestro-alumno, alumno-alumno, alumno-material.

Tabla 50. Características del método de enseñanza del colegio K.

Elementos del método de enseñanza	Características del Colegio K
Sistema de conceptos	Científicos (número) Sistema de conceptos (número, sistema numérico, fracción).
Orientación	Independiente General Completa
Sistema de acciones	Materializadas (hojas para representar la medida, acciones de conversión y comparación)  Perceptivas (dibujo)  Verbales externas (solución de algoritmos)
Forma de interacción	Alumno-objeto: acciones materializadas (hoja como medida)  Alumno-alumno: apoyo mediante la explicación verbal y perceptiva, colaboración para solucionar, preguntas sobre instrucción (recordar o afirmar).  Maestra-alumno: explicación del tema, preguntas dirigidas, repetición de explicación.
Actitud	Agrado y participación de los alumnos, se ayudan para dar respuestas correctas.  Existe un gusto por querer solucionar primero de forma correcta
Alumnos	-Concepto de número -Acciones de comparación y conversión de medidas, aunque aún no se consolida la comparación de medidas de tiempo. -Solución de operaciones matemáticas en acciones verbales y solución de algoritmos. -Respuestas reflexivas -Solución de problemas matemáticos de forma reflexiva y operativa (en ocasiones se presenta impulsividad)

La descripción de los métodos de enseñanza que hemos presentado permitió identificar algunas semejanzas y diferencias generales entre ellos. Mencionaremos en que consistieron éstas entre los colegios S-M y M-K, no obstante, entre los colegios S-M y S-K no existieron semejanzas, por lo que no se abordará este aspecto. Afirmaremos que se presentaron solamente las diferencias entre los métodos de enseñanza y sus resultados.

Primero, las maestras de los tres colegios lograron describir su forma de enseñanza y mostrar cómo la lleva a cabo en las aulas. Cada maestra refirió un enfoque diferente y, a pesar de tener que considerar el programa SEP, fue posible observar que solo la maestra del colegio S lo tiene como única herramienta. Las maestras de los colegios M y K, al tener una visión de la enseñanza diferente al programa SEP, tienen mayores opciones para enseñar las matemáticas, una similitud entre ellas fue el uso de materiales. Otra similitud entre los tres métodos fue el agrado de los alumnos por las maestras, aunque algunos alumnos de los colegios S y M mostraron preocupación constante por resolver las tareas de forma correcta.

Los colegios M y S comparten similitudes en el sistema de conceptos que utilizan las maestras y el tipo de orientación (ver tabla 51). Por ejemplo, las maestras trabajan con tareas aisladas y con contenido matemático empírico-concreto. Observamos que los temas “fracciones equivalentes” (colegio M) y “uso de balanza” (Colegio S) que las maestras enseñaban no se relacionaban con el concepto de número ni otros contenidos (medida), solo con la cantidad. Sin embargo, la maestra del colegio K en las clases que observamos fue posible identificar tres características que permanecían: magnitud, medida y cantidad de veces. A partir de las relaciones entre éstas se enseñaba la fracción y la solución de problemas.

Tabla 51. Semejanzas y diferencias entre los colegios S y M

Semejanzas	Diferencias	
	Colegio S	Colegio M
Enseñanza de contenidos empíricos y aislados.	Fracciones, solución de problemas y uso de balanza sin relación con concepto de número o	Fracciones equivalentes y multiplicación sin relación con concepto de número o

Semejanzas	Diferencias	
	Colegio S	Colegio M
	medida.	medida
Uso de la cantidad como contenido matemático	Énfasis en los datos de las tareas de solución de problemas.	Uso del material para asignar una medida y cantidad.
Tipo de orientación dependiente	Los alumnos requieren de la constante orientación del adulto para resolver correctamente.	Los alumnos requieren del uso constante del material para resolver correctamente.

Los colegios M y K fueron similares en los elementos de sistema de acciones y formas de interacción. Como mencionamos, las maestras utilizan material para enseñar las matemáticas, sin embargo, la maestra del colegio K diseña su material en relación con el contenido matemático que va a desarrollar. También, fue común el sistema de acciones, las maestras utilizan diversos planos (ver tabla 52). En el colegio M observamos que los alumnos resuelven tareas primero con el material de forma grupal (clase de fracciones equivalentes) y después (siguiente clase) resuelven de forma individual en su libro. En este libro se les solicita formar primero un modelo, dibujar el modelo y después asociar con la cantidad, mientras que en el colegio K, una tarea es realizada de forma grupal y mediante diversas acciones. El material les permite comprender el proceso, más los alumnos ejecutan en los siguientes planos (perceptivo y verbal externo), por lo que el material se deja de usar una vez que haya cumplido su objetivo.

Tabla 52. Semejanzas y diferencias entre los colegio M y K

Semejanzas	Diferencias	
	Colegio M	Colegio K
Uso de materiales y acciones con los mismos	Uso de material dado por el colegio. El contenido	Diseño del material en relación con el concepto

Semejanzas	Diferencias	
	Colegio M	Colegio K
	matemático se asocia a las características físicas del material (forma, color).	de número y acción de medición.
Uso de diversos planos de acción (materializado, perceptivo y verbal externo)	Uso de acciones aisladas y asociadas a la construcción de un modelo, copia del mismo y escritura de la cantidad correspondiente.	Uso de acciones con contenido matemático. Paso gradual de un plano de acción a otro, se busca que el alumno logre un plano verbal externo.
Diversas formas de interacción; alumno-objeto, alumno-alumno, maestra-alumno.	Los alumnos tienen una dependencia en el uso de su material.  Existe un énfasis en la comunicación afectivo-emocional.	Los alumnos pueden orientar a sus compañeros mediante la acción de medición.

Para concluir este apartado, percibimos que la comunicación afectivo-emocional que tienen las maestras del colegio M favorece que los alumnos pregunten y participen de forma independiente. En el colegio S la maestra daba preguntas que incluían las respuestas, frases incompletas, o pregunta a los alumnos que sabían las respuestas de las operaciones. En el colegio K la maestra daba preguntas reflexivas con opciones de respuestas lógicas o absurdas, además de que ella conseguía que todos los alumnos participaran.

### 5.5 Retroalimentación

Después de aplicación de procedimientos de evaluación y las entrevistas, se realizó la retroalimentación en los tres colegios que consistió de dos actividades: entrega de resultados a las maestras y a los alumnos (grupo). Estas actividades se realizaron

con los colegios K y S. El colegio M solo permitió la entrega de resultados a la maestra de matemáticas y coordinadora académica para no confundir a los alumnos.

#### A) Entrega de resultados a maestras

En los colegios K y S se utilizó la grabación de sesiones para analizar las evidencias. La maestra del colegio K y S lograron ver la clase de solución de problemas que impartieron. Ambas maestras fueron cuestionadas sobre sus objetivos, si estos se cumplieron, que observaban en las respuestas de sus alumnos. En el caso del colegio S, se indagó sobre la posible causa de que los alumnos no respondieran correctamente. La reflexión que realizamos con la maestra del colegio S dio como resultado que ella comentara que sus indicaciones no eran claras y que su objetivo era solo la respuesta a los algoritmos de los problemas, porque eso es lo que se resuelven en los exámenes. Las recomendaciones generales para la maestra fueron que se trabajara con: conocimiento claro de los conceptos matemáticos, uso de material para formar las acciones de medición y conversión de medidas, organización de la solución de problemas de acuerdo a una estructura, aplicación de las acciones en diversos planos con contenido matemático, diversidad cualitativa de las tareas (problemas con solución, sin solución, inventados por los alumnos).

La maestra del colegio K mencionó que una de las dificultades en su práctica era la falta de reflexión en la pregunta final de los problemas matemáticos, en la cual insistiría más. Además, identificamos junto con ella que estudiar más la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza le daría mayores herramientas para comprender y explicar su tipo de orientación.

La entrega de resultados con el colegio M fue solo de forma verbal sin análisis de video, porque no permitieron la video-grabación, sin embargo se utilizaron algunas frases para reflexionar. Las maestras consideraron que uno de los principales objetivos de su enseñanza era que los alumnos usaran su material para resolver tareas matemáticas y que mediante la observación pudiera explicar que perciben. Además, de tener como objetivo la regulación emocional de cada alumno. Uno de los temas que comentamos fue la cualidad de generalización (abstracción) de las matemáticas, lo cual las maestras consideran que por la etapa de los niños se requiere todavía el uso del material, de hecho, una de sus preocupaciones es que

los niños a esa edad utilicen solo algoritmos o cálculos verbales sin tener un referente visual. Las maestras mostraron agrado al saber que los alumnos utilizaban su material en todo momento, debido a que para el método Montessori el material debe dejar de usarse hasta sexto grado.

b) Entrega de resultados a alumnos

Para esta sesión se trabajó con los grupos de alumnos directamente en los colegios S y K. En el caso del colegio S participaron 16 alumnos. Los alumnos resolvieron las tareas del protocolo de evaluación con nosotros. Iniciamos preguntando que era un número, para lo cual los alumnos continuaban enfatizando la característica de cantidad. Por lo que se trabajó la acción de medición para mostrar las características esenciales del concepto de número (Magnitud, medida y cantidad de veces), posteriormente se les preguntaba cuáles de los siguientes ejemplos eran número y por qué (5, 4x, 3 metros, 56 libros y 14 minutos,  $2+2$ ).

Los alumnos en su mayoría del colegio S y todos los alumnos del colegio K consideraron que la medida es un criterio principal, referían que 5 y  $2 + 2$  no era posible porque no tenían una medida, por lo que podían ser cifras. Posteriormente, realizamos ejercicios de comparación de medidas, por lo que se trabajaron con los sistemas de medición de tiempo y de longitud.

La siguiente tarea que trabajamos fue la relación entre medidas con preguntas que incluían la percepción directa de objetos opuestos en sus cualidades, por ejemplo “¿qué es más pesado 100 kg de algodón o 100 kg de acero?” Algunos alumnos del colegio S mencionaron rápidamente que era el acero, sin embargo al repetirles la pregunta y recordar que es un número, ellos lograron reflexionar que los números eran iguales porque tenían la misma medida. Los alumnos del colegio K respondieron correctamente.

Por último, realizamos la solución de problemas con el apoyo de una tarjeta que organizamos para ellos. Les explicamos a los alumnos en qué consistía un problema matemático (situación y una pregunta final), les pedimos que pegaran la tarjeta de orientación (figura 11) y que fuera necesario seguir todos los pasos, porque uno de sus errores fue contestar solo el algoritmo y centrarse en los datos. Por lo anterior,

los tres primeros problemas los resolvimos paso a paso con los alumnos del colegio S y después ellos resolvieron uno por sí solos.

En la figura (12) mostramos un ejemplo de solución de esta tarea con el colegio S. Con el colegio K, la tarjeta fue asimilada prontamente, pero los alumnos necesitaron escribir al menos dos veces los pasos para poder resolver de forma independiente.

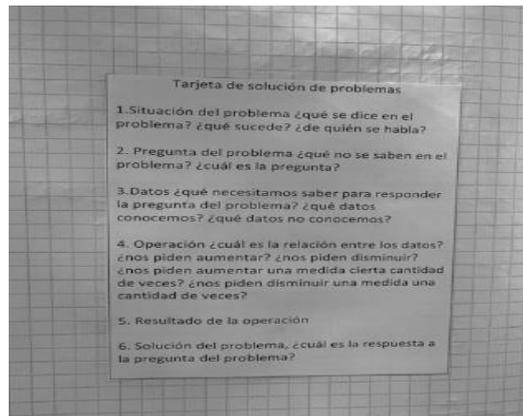


Figura 11. Tarjeta de orientación para la solución de problemas

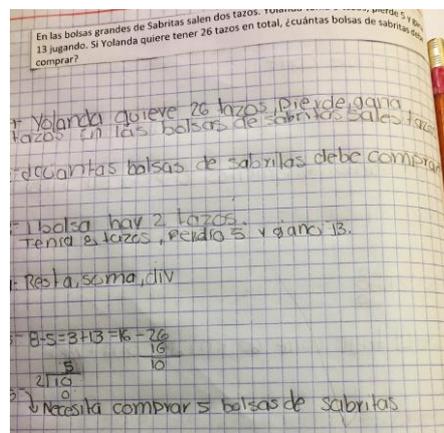


Figura 12. Ejemplo de solución de problemas mediante el uso de la tarjeta de orientación

Por último, las maestras de los colegios K y S comentaron al final de la clase que les parecía muy interesante la tarjeta de orientación, porque está dirigida hacia el pensamiento y comprensión del problema, y no solo a su solución numérica. Además, la maestra del colegio K mencionó que la tarjeta permite que el niño

explique sus resultados a partir de los elementos del problema matemático y no solo de la operación.

## **6. Discusión**

Uno de los principales retos cuando se refiere a los métodos de enseñanza es evitar simplificarlos a una lista de estrategias o sugerencias empíricas, por lo que coincidimos con la propuesta de Stankin (1985, citado por Zilberstein y Olmedo, 2017) de posicionarnos en una teoría para poder descubrir la esencia del contenido del método de enseñanza. Nosotros hemos identificado y organizado dicho contenido, así también proponemos a éste concepto como unidad de análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemática en el aula escolar, con el objetivo de conocer cómo se da este proceso dentro de algunos colegios privados en México y cuál es su relación con los conceptos matemáticos que aprenden los alumnos.

Desde este punto de vista, hemos decidido utilizar las premisas de la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza (Talizina, 2009; Galperin, 2009) para proponer los siguientes elementos del método de enseñanza: sistema de conceptos, tipo de orientación, de acciones y de colaboración. Desde el paradigma histórico-cultural fue posible obtener las categorías teóricas sobre la relación entre educación y desarrollo (Vygotsky, 2006), el desarrollo de conceptos matemáticos (Davíдов, 1988; Salmina, 2017; Talizina, 2017), la formación de las acciones (Galperin, 2009; Talizina, 2009) y la organización de la enseñanza-aprendizaje (Talizina, 2009; Talizina, Solovieva y Quintanar, 2010). Este contenido también nos permitió diseñar los instrumentos de investigación que fueron aplicados tanto a maestras como alumnos.

A partir del análisis de resultados es posible afirmar que el objeto de estudio de nuestra investigación, método de enseñanza. El cual fue conceptualizado desde la teoría de la actividad y contiene las características esenciales que permiten identificar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en tres colegios con diferentes perspectivas. Así también permitió dar respuesta a la pregunta de investigación que fue planteada ¿cómo es el proceso de enseñanza-aprendizaje de

las matemáticas en tres colegios con modelos diferentes (Montessori, Competencias, de la Actividad)?

Los supuestos que elaboramos se basan en los resultados obtenidos por las investigaciones de programas formativos de conceptos y habilidades matemáticas realizadas desde la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza (Talizina, 2009, 2017; Zárraga, Solovieva y Quintanar, 2017; Rosas, Solovieva y Quintanar, 2017; Solovieva, Ortiz y Quintanar, 2010; Galperin, 2009; Nikola y Talizina, 2017; Butkin, 2017; Valadarskaya, 2017) Estas investigaciones han mostrado la organización de condiciones que permiten a los alumnos formar y desarrollar conceptos matemáticos, entre ellas, el tipo de orientación (completa, general e independiente), las acciones necesarias y su contenido matemático. Así, el primer supuesto que elaboramos fue: si los métodos de enseñanza que tienen una sistematización del contenido matemático, la orientación completa-generalizable-independiente y acciones en diversos planos favorecen la adquisición de los conceptos numéricos y posibilidades para solucionar problemas en los alumnos.

Nuestros resultados permiten responder a este supuesto. Solo fue posible observar un colegio (colegio K) que cuenta con las características expresadas en nuestro primer supuesto. La maestra que conoce los conceptos matemáticos, organiza el contenido y enseña a los alumnos las características esenciales del concepto de número y sus relaciones. Además, utiliza una secuencia de acciones en diversos planos (materializado, perceptivo y verbal externo) con el mismo contenido matemático. A partir de los resultados de la evaluación con los alumnos fue posible considerar que las condiciones de enseñanza que la maestra organiza son las que favorecen a la formación de conceptos de los alumnos. La maestra y alumnos identifican las características esenciales del concepto de número. Los alumnos realizan acciones de identificación, comparación y conversión de medidas de forma independiente. Solo un alumno, el cual fue reportado con dificultades de aprendizaje por su maestra y cuenta con un diagnóstico neuropsicológico de Síndrome de Williams, este alumno necesitó mayor apoyo para resolver las tareas matemáticas. Este apoyo fue a partir de la escritura y explicación de las relaciones matemáticas.

En relación con la solución de problemas, la maestra utiliza una tarjeta de orientación para organizar esta tarea y también utiliza diversas formas de problemas

matemáticos (con o sin solución), por lo que durante la evaluación los alumnos lograron identificar el problema que no tenía solución y explicar la razón (datos faltantes). También es posible considerar que los alumnos aún no dominan de forma independiente el contenido de la orientación que la maestra les brinda en una tarjeta, nosotros observamos que los alumnos en la mayoría de las ocasiones no mantienen la pregunta final del problema, y suelen preocuparse más por resolver las operaciones aritméticas. Por lo que es necesario continuar con la orientación de las acciones necesarias para solucionar los problemas, específicamente atender la pregunta final.

Las condiciones anteriores fueron observadas solo en el colegio K. La maestra de este colegio ha tenido un proceso de profesionalización dentro del mismo colegio. Los cursos a los que ha asistido le han permitido identificar los conceptos generales de la teoría de la actividad aplicada a la enseñanza y, a pesar de no expresar de forma directa las categorías, ha sido posible que ella las considere y utilice en su enseñanza. Específicamente, la maestra identifica las características esenciales del concepto de número, tiene una orientación completa, general e independiente, así como trabaja acciones en diversos planos y propone tareas tanto individuales como colectivas.

El segundo supuesto elaborado en esta investigación se relaciona con la afirmación de que las maestras que tienen conocimiento acerca de la estructura, el contenido de conceptos numéricos y el proceso de solución de problemas logran formar estos contenidos en sus alumnos de manera más exitosa.

A partir de las entrevistas y las observaciones de clases identificamos que las maestras de forma general conocen la característica de la “cantidad” del concepto de número. Específicamente, la maestra del colegio K logra describir las características esenciales del concepto de número (medida, magnitud y cantidad de veces) y esto logra enseñar a los alumnos, aunque, los alumnos de forma directa no logran expresar estas características cuando se les pregunta sobre concepto de número. Los alumnos de este colegio lograron identificarlas y aplicarlas a las tareas propuestas en la evaluación.

En relación con los colegio S y M identificamos que las maestras solo consideran la característica de cantidad del concepto de número. En el colegio S el contenido

principal son los algoritmos matemáticos, y en el colegio M se trabajan representaciones de cantidades mediante la manipulación de material. Los alumnos de estos colegios operan con dichas cantidades y de forma aislada identifican la característica de la medida, por ejemplo, en el ejercicio ¿en el número 182, qué dígito vale más? La mayoría de los alumnos de estos colegios mencionaban que el número 8 valía más, durante la evaluación fue posible identificar que para ellos los números eran igual que los dígitos o cifras.

En relación con la tarea de solución de problemas, fue posible percibir que la maestra del colegio K conoce la estructura general de esta actividad y la trabaja mediante una tarjeta de orientación. Sin embargo, los alumnos aun no logran asimilar todo ese contenido y responden de forma inmediata la solución de la operación aritmética, mientras que en los colegio S y M las maestras desconocen la estructura. En el colegio M las maestras trabajan mediante acertijos de forma cotidiana, es decir, en cualquier momento pueden establecer un acertijo, por ejemplo “tengo 20 nueces y quiero repartirlas entre nosotros, ¿cuántas nueces nos toca a cada uno?” En este ejemplo es posible percibir que este problema cuenta con una situación problemática y una pregunta final, más se espera que los alumnos resuelvan con sus propias herramientas, así como limiten su análisis a situaciones cotidianas. Nosotros encontramos que los alumnos de este colegio tuvieron dificultades para comprender los problemas que implicaban una situación no tangible ni perceptiva de forma directa (distancia entre tiempo).

En el otro caso, colegio S, la maestra si utiliza situaciones problemáticas como tareas particulares, es decir, que todos los problemas dados implican solo una operación aritmética. En esta tarea observamos que la maestra da mayor relevancia a la identificación de datos y solución de los algoritmos. Además, la maestra les comenta a los alumnos qué operación aritmética van a utilizar para resolver, por ejemplo, en una clase fue posible observar que la maestra les recordó que ella había comentado que usarían solo la operación de división.

A partir de este análisis sobre solución de problemas, es posible identificar que solo la maestra del colegio K conoce una estructura y favorece a que los alumnos trabajen diferentes tipos de problemas (con o sin solución), sin embargo, ese contenido de la estructura aún no es dominado por los alumnos. Los alumnos de

este colegio lograban explicar sus respuestas, por ejemplo, en el problema que implicaba la relación “veces menos” ellos afirmaron que era una división porque disminuía una medida. En el colegio S también existe una estructura pero se relaciona más con la parte operativa (identificación de datos y solución de algoritmos), por lo que los alumnos solo atienden datos y adivinan que operación matemática implica, ellos tuvieron dificultades para explicar sus resultados durante la solución de problemas. Por último, el colegio M no tienen una estructura y utiliza solo situaciones cotidianas. En los alumnos del colegio M fue posible percibir que tenían dificultades para comprender las situaciones que no son posible visualizar de forma inmediata (distancia entre tiempo), por lo que una vez que identificaban los datos utilizaban sus cubos para resolver la operación aritmética, más también tuvieron dificultades para explicar sus respuestas. Es posible mantener la afirmación de que el contenido matemático que las maestras dominan es base para su enseñanza y formación de conceptos y habilidades matemáticas en los alumnos. Esta condición ha sido identificada en el estudio de Lima y De Moura (2017) como exigencia básica para el maestro que enseña las matemáticas, debido a que las Matemáticas es una asignatura marcada por el formalismo y prevalencia de la lógica formal. Así mismo estos autores han encontrado que una de las dificultades más significativas a las que se enfrentan los maestros de matemáticas es lidiar con los propios conceptos de las matemáticas.

Para concluir con los supuestos, nuestro tercer supuesto consistió en considerar que los resultados de los métodos de enseñanza pueden mostrar los conocimientos de los alumnos, así como las actitudes que ellos tienen respecto al proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. De forma general, la mayoría de los alumnos mostraron una actitud positiva e interés hacia la asignatura de las matemáticas. Los alumnos de los tres colegios en general expresaban que les agradaba la forma en que sus maestras les enseñaban matemáticas. Específicamente, algunas respuestas de los alumnos se relacionaban con las habilidades que ellos habían desarrollado, por ejemplo, un alumno del colegio S refería que era bueno para las matemáticas y por eso le gustaba, otro alumno refería que le gustaba resolver divisiones con resta y fracciones. Otras respuestas se relacionaban con el interés cognoscitivo (Talizina, 2009), por ejemplo, algunos alumnos del colegio K mencionaron que le gustaba las matemáticas porque “me

permiten aprender más” “te ayudan todo el tiempo”. Las respuestas de los alumnos del colegio M se relacionaban con el agrado al material “me gusta las matemáticas porque trabajas bien la mente, me gusta el material” “me enseñan a sumar, hacer cadenas, aquí las práctico y en casa también”. Además, dos alumnos del colegio S y del colegio M refirieron que casi no les gusta las matemáticas “más o menos, si fueran menos complicadas” “mas o menos, casi no las practico” (ejemplos del colegio M), “prefiero civismo porque es más fácil” (ejemplo colegio S). Sin embargo, todos los alumnos mostraron una actitud adecuada para realizar las tareas en la evaluación dinámica propuesta. Sin embargo, identificamos que dos alumnas del colegio S se mostraban nerviosas al responder las tareas de evaluación, ambas expresaron su preocupación por no lograr resolver las tareas.

En relación con los conocimientos de los alumnos percibimos que todos conocían la característica de la cantidad como característica del concepto de número e identifican la medida en tareas directas. No obstante, observamos diferencias entre los alumnos de los tres colegios en relación con los tipos de apoyo que necesitaban para la solución de algoritmos y de problemas matemáticos. Los alumnos del colegio K al conocer las características del concepto de número y sus relaciones matemáticas lograron resolver preguntas, operaciones y problemas aritméticos con un mínimo apoyo por parte del evaluador. Específicamente en un problema que mencionaba la relación “veces menos” todos los alumnos lograron identificar que se trataba de la disminución de una medida dada, es decir, una operación de división. En el caso de los alumnos del colegio S requerían mayor apoyo para organizar los pasos y solucionar los algoritmos, todos los apoyos (escritura y verbal) fueron relacionados con la explicación de la medida. Por su parte, los alumnos del colegio M necesitaron mayor apoyo de su material, las veces en que no era suficiente para resolver (ya sea por no contar con mas cubos o no saber cómo usarlos-conversión de medidas de centenas a decenas o unidades) ellos creaban sus propias estrategias, la principal fue el dibujo concreto.

Una vez presentado los supuestos abordaremos la descripción en relación con los objetivos establecidos en nuestra investigación. El primer objetivo consistió en identificar de forma general los métodos de enseñanza de cada colegio. Para lo cual establecimos los siguientes elementos como contenido de los métodos de

enseñanza de las matemáticas: 1) la sistematización de los elementos del método de enseñanza, 2) el contenido conceptual y solución de problemas que desarrollan los alumnos y 3) la identificación de las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas.

En el primer elemento del método de enseñanza, sistema de conceptos matemáticos, como hemos descrito tanto en el apartado de antecedentes con las investigaciones de Nikola y Talizina (2017), Steel (2001), Ortiz (2007), Sueanne, Robinson y Berube (2013) y Rosas (2012), y en el marco teórico (Davídov, 1988; Galperin, 2009; Talizina, 2009) es posible evidenciar la relación entre el conocimiento matemático que han desarrollado las maestras con el contenido de su enseñanza. En la siguiente tabla (53) presentamos nuevamente un resumen de los resultados encontrados en cada colegio en relación con el sistema de conceptos.

Tabla 53. Elemento de sistema de conceptos en cada colegio

Colegio S	Colegio K	Colegio M
-Empíricos (operativo)	-Científicos (número) -Sistema de conceptos (número, sistema numérico, fracción).	-Empíricos (operativo) -Definiciones: abarcando características aisladas.

Nosotros identificamos que la maestra del colegio K utiliza un método basado en conceptos matemáticos. En su clase se observó la introducción del tema de fracciones como una nueva relación entre la medida y cantidad de veces utilizada, es decir, a partir de las características del concepto de número. Además, a partir de la entrevista con la maestra, fue posible descubrir que ella conoce las características del concepto de número, siendo la formación de conceptos el principal objetivo de su enseñanza, dichas características siempre las utiliza para introducir nuevos temas que dependen de las diversas relaciones entre las mismas. Los alumnos también lograron identificar estas características en tareas y problemas matemáticos que implican comparación, conversión, aumento, disminución, repartición, aumento o disminución de una cantidad dada. No obstante, los niños aún están en proceso de

aprendizaje de otros sistemas de medición (tiempo), requieren del apoyo verbal y perceptivo. Así también, en el componente matemático continúan en proceso de generalización de la habilidad de comprender que la cantidad depende de la medida en tareas que implican un objeto concreto, por ejemplo, en la tarea de ¿qué pesa más un kilo de algodón o un kilo de acero? Aquí cuatro alumnos centraron su atención en el objeto y no en la cantidad y medida.

Por su parte, en el Colegio S se trabaja la automatización de operaciones aritméticas, por lo que podemos referirlo como un método operativo. La maestra expresa que su objetivo de enseñanza es la solución de las operaciones aritméticas (algoritmos como problemas), y menciona que los conceptos que deben enseñarse son las operaciones aritméticas. Por lo que su enseñanza se centra en la solución de ejercicios, aunque existen preguntas reflexivas no son dirigidas hacia la comprensión de las relaciones entre los elementos matemáticos sino al análisis de situaciones particulares y a la obtención de resultados. Por ejemplo, la enseñanza de las fracciones es a partir de las operaciones de división y multiplicación, sin considerar la característica de la medida ni la cantidad que se utiliza. Los alumnos realizan durante las clases acciones verbales externas, principalmente mediante la escritura asocian los números como resultados mecánicos, sin poder conocer ni manipular objetos que muestren y representen las relaciones que existen entre la medida y la cantidad. Esto mismo observamos en la evaluación con los niños, quienes se dedicaban a dar resultados por ensayo y error (adivinando resultados). Debido a lo anterior, continúa siendo este elemento fundamental para la enseñanza de las matemáticas como lo han establecido las investigaciones de Steel (2001), Castro, (2007), Sueanne, Robinson y Berube, (2013). Estos autores concluyeron que el dominio del contenido matemático favorece que los alumnos aprendan.

En el caso del colegio M observamos el trabajo con las definiciones y características de medida y cantidad de veces del concepto de número pero de forma aislada. Las maestras en cada clase describen un concepto (fracciones equivalentes, binomio al cuadrado, elementos de la multiplicación: factores y productos), pero de forma particular, es decir, solo para la solución de una clase de ejercicios, lo que obstaculiza la generalización de las características del número y del pensamiento matemático. El desarrollo del pensamiento matemático se ve limitado por el uso

constante de la observación y de situaciones cotidianas. A pesar de utilizar diversos materiales, es difícil desprenderse del significado que las maestras le dan al material, debido a que se utiliza solo para un ejercicio específico. En la evaluación, los alumnos enfatizaban en el color del cubo, sin embargo, el color es una característica irrelevante, no esencial para representar un número.

La formación de conceptos teóricos de acuerdo con Davidov (1988) requiere de descubrir la relación genéticamente inicial, la base universal, la esencia del objeto, así como sus relaciones internas que son descubiertas en las mediatizaciones. Esta formación requiere del conocimiento empírico, debido a que este categoriza y cataloga, mientras que el conocimiento teórico reproduce la esencia del objeto. En el colegio K es posible afirmar que la maestra y los alumnos identifican la célula (Magnitud, medida y cantidad de veces) del concepto de número, así como las relaciones que surgen entre ellas, a partir de las mediatizaciones como utilizar un listón como medida, un lado de un cuaderno como magnitud y un palito de conteo como la cantidad de veces es como ellos construyen y asimilan dicho concepto de número. En el colegio M se mantiene el pensamiento empírico, ya que la palabra es el medio principal para consolidar la información, el uso de términos matemáticos y su asociación con objetos abstractos no muestran las relaciones internas de un concepto de número, e inclusive si se analizan las habilidades matemáticas, propuestas por Salmina (2017), Solovieva, Ortiz y Quintanar (2010) y Zárraga, Solovieva y Quintanar (2017), solo se desarrollan las habilidades matemáticas (uso de medida) y habilidades lógicas (seriación, comparación, conversión), siendo las habilidades simbólicas y espaciales las menos trabajadas.

En el último caso, colegio S, se mantiene un nivel operativo, propio de la formalidad de las matemáticas, se presentan ya elaboradas las operaciones aritméticas, siendo la principal característica la cantidad. El número es presentado como absoluto, solo hay comparaciones de cifras que contienen un significado cotidiano, lo que engancha al pensamiento a su elemento particular. Tanto en el colegio M como colegio S las maestras desarrollan el pensamiento empírico (cálculos, asociación de una medida a un objeto) para resolver problemas prácticos-cotidianos, mientras en el colegio K se desarrolla el pensamiento teórico (conceptos matemáticos) para resolver problemas teóricos mediante representaciones empíricas (Puentes, 2018).

En relación con el tema de fracciones, observamos al menos una clase de las tres maestras enseñando este tema. Realizando un análisis desde el contenido de la matemática podemos encontrar en el estudio de Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013) que existen al menos tres formas que limitan la enseñar las fracciones: 1) como resultado de transformar un objeto, 2) la fracción como tantos de tantos, y 3) la fracción como incluida en un todo-entero. En el primer caso, la fracción se muestra como un fracturado, es decir, que un todo ha sido partido, quebrado o coloreado en partes, esta equipartición ha mostrado limitaciones debido a que no muestra el proceso de irreversibilidad. El segundo caso, tanto el numerador como denominador se expresan como si fueran números, que resultan de un conteo, considerando la formación de subconjuntos mediante la adición, mientras que el tercero, consiste en concebir que exista un tanto dentro de otros tantos, esto limita a la percepción de solo enmarcar a un entero. Los autores Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013) proponen que la enseñanza de las fracciones debe superar las dificultades anteriores considerando: 1) la repartición equitativa de múltiples enteros, y 2) fracción como comparador. Esta segunda propuesta consiste en partir de una medida (vara) y plantear el problema de crear unidades de medida más pequeñas que den cuenta de manera precisa y sistemática de la longitud de los espacios donde la medida no cubre exactamente.

A partir de nuestros resultados, es posible considerar que tanto el colegio M como colegio S utilizan las tres formas que limitan la enseñanza de las fracciones. En el colegio S se utiliza el dibujar la parte faltante o indicada de una fracción (caso de transformar un objeto-fracturación y fracción incluida en un todo), cuando la maestra incluye tareas de sumas de fracciones, es posible percibir el caso de tantos de tantos, donde solo se establece un subgrupo ( $2/4 + 7/4$ ) que no tiene significado y solo se mecanizan resultados (Ramírez y Block, 2009).

En el caso del M se solicita formar un entero y partirlo de acuerdo a indicaciones de la maestra (caso de transformar un objeto-fracturación), aunque los alumnos vuelven a formar el entero correspondiente continúa la limitación de solo asociar a un entero (fracción incluida en un todo). A pesar de trabajar con modelos materializados de fracciones, los alumnos no lograron ver más que partes aisladas, recordamos que una alumna tenía un entero conformado por diez partes, el cual ella dividió en cinco

partes. La maestra le pidió tomar una parte (dos cubos-un quinto) y le preguntó cómo se llamaba lo que tenía en la mano, la alumna inmediatamente respondió dos y no logró comprender la relación matemática, solo mencionaba nombres diferentes de denominar la cantidad que la maestra le solicitaba (tercer caso, tanto en tantos).

Sin embargo, en el colegio K identificamos el trabajo de la fracción no desde su aspecto concreto- partición, sino como la propuesta de Talizina (2009), Salmina (2001) y Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013) desde la acción de medición, aunque estos últimos autores no refieren de formar directa esta acción es posible inferir que la proponen como mejor forma de enseñar la fracción (fracción como comparador). La maestra del colegio K, considera como un todo-la unidad y como partes-las medidas en las que ha sido dividida, en cada ejercicio los alumnos mantienen esta relación. Para resolver tareas ellos utilizan una hoja de papel y pedazos de la misma para representar las distintas medidas. Esta misma relación, permite a los alumnos recordar la multiplicación ya que ellos aplican una medida una cierta cantidad de veces para conseguir una Magnitud, la cual en el caso de tantos incluidos en otros tantos por Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013) los alumnos suelen inferir como adición. También, el que la maestra proponga el uso de hojas para representar las medidas, de acuerdo con Rojas, Flores y Carrillo (2013) muestra que esta maestra cuenta con conocimientos tanto de contenido de las matemáticas como de enseñanza (contenido verbal, numeral y concreto). Estos autores han concluido que el uso del contenido verbal, numeral y concreto favorece el aprendizaje de las fracciones en alumnos españoles.

El segundo elemento del método de enseñanza fue el tipo de orientación. Este elemento a nivel teórico-práctico tiene una gran participación e incluso se ha establecido que el éxito de las acciones depende del tipo de la orientación (Solovieva y Quintanar, 2018). En las investigaciones de Talizina (2009, 2017), Galperin (2009), Nikola y Talizina (2017), Butkin (2017) y Valadarskaya (2017) se ha concluido que la orientación de tipo independiente, completa y generalizada desarrolla los conceptos y acciones matemáticas tanto en aritmética como en geometría.

El contenido de este elemento fue establecido por Galperin (2009) de la siguiente forma: a) del aspecto suficiente de la base orientadora de la acción, si es completa,

incompleta o abundante (características del concepto); b) del nivel de generalidad, si se presenta de forma particular, para un caso único o si se presenta de forma general mostrando la esencia de toda una clase de casos concretos; c) del medio de obtención, es decir, si la base orientadora se le da al niño en forma preparada o si el niño la obtiene de manera independiente.

En nuestra investigación fue posible identificar dos tipos de orientación: en el colegio K fue completa, general e independiente, mientras que en los colegio S y M fue de tipo incompleta, concreta y dependiente (en un caso, dependencia hacia la maestra, en el segundo caso hacia el material). En la siguiente tabla (54) se presentan.

Tabla 54. Elemento de tipo de orientación en cada colegio

Colegio S	Colegio K	Colegio M
-Dependiente (maestra) -Particular -Incompleta	-Independiente -general -Completa	-Dependiente (material) -Particular -Incompleta

En el colegio K, la maestra, al conocer los conceptos matemáticos como sistemas, intenta organizar su explicación y tareas enfatizando constantemente en las relaciones entre los elementos matemáticos, por lo que su orientación es general y completa. Esto conlleva a que los alumnos resuelvan una serie de ejercicios por sí mismos (independiente) en diversos planos de acciones (materializadas, perceptivas y verbal externa). Además, la maestra utiliza tarjetas de orientación que incluye las acciones necesarias para la solución de problemas, (Talizina, 2009; Rosas, Solovieva y Quintanar, 2017) para que los alumnos puedan resolver problemas matemáticos, cuando los alumnos siguen la secuencia de esta tarjeta logran resolver los problemas sin dificultades.

A diferencia de lo anterior, en el Colegio M la maestra identifica definiciones y características aisladas de los conceptos, lo que caracteriza su orientación como incompleta. Además, la maestra utiliza estas definiciones para plantear tareas específicas (multiplicación, fracciones, divisiones) de forma aislada, siendo la

orientación particular. Además, la maestra acompaña de inicio a los alumnos, esto implica dar tiempo suficiente y “pistas” hasta que ellos logren dominar el uso del material y puedan compartir el conocimiento. Por lo que fue posible observar que los alumnos trabajan de forma independiente, y realizan preguntas específicas a la maestra cuando tienen dudas. Las maestras les permiten en todo momento aportar con sus observaciones, utilizar el material para mostrar esas observaciones y compartir con sus compañeros el conocimiento. Es posible identificar un proceso de construcción de conocimiento sensorial-empírico entre la maestra y los compañeros en cada presentación. Sin embargo, se observa una dependencia total de los alumnos con el material que constantemente se usa para todas las tareas. En resumen, en este colegio se trata de una orientación particular, incompleta y dependiente.

En el caso del colegio S la maestra presenta una explicación concreta para cada tipo de ejercicios (orientación incompleta), los cuales se observan en aislados (orientación incompleta) y se infiere el objetivo de automatizar el cálculo. Además, la orientación es dependiente, los alumnos cometen errores frecuentemente, tanto relacionados con los procedimientos de solución a ejercicios matemáticos como de seguimiento de instrucciones generales, por ejemplo, en la solución de problemas matemáticos la maestra no especifica que tipo de algoritmo pueden utilizar para resolver divisiones, por lo que muchos alumnos se confunden, esto mismo se observó durante la evaluación con los niños, los alumnos requerían de la constante repetición de instrucciones y organización de los algoritmos. Sin embargo, observamos que la maestra logra una mejor orientación en tareas generales, como dibujar, en la cual describe las características del objeto que dibuja y los alumnos logran representar correctamente. Por último identificamos que dentro de sus estrategias orientativas particulares está la identificación de palabras clave en la solución de problemas, aunque nuevamente no se hace explícito las acciones matemáticas que implican, solo la asociación operación-palabra (resta-quitar).

El tercer elemento del método de enseñanza es el tipo de las acciones que utilizan las maestras. Las acciones, de acuerdo con Galperin (2009), Talizina (2009) y Solovieva (2004) pueden ser realizadas en los siguientes planos de ejecución: materiales- uso de objetos reales, materializadas- sustituto del objeto real,

perceptivas-concretas (objeto) o esquemáticas, verbales externas- habla o escritura, plano mental. En nuestra investigación identificamos que un colegio trabaja solo con acciones en el plano verbal externo (lenguaje escrito), mientras que en dos colegios las acciones iniciaban en el plano materializado, después plano perceptivo y finalmente plano verbal externo (ver tabla 55).

Tabla 55. Elemento de tipos de acciones en cada colegio

Colegio S	Colegio K	Colegio M
-Verbales externas (escritura)	-Materiales materializadas y (hojas para representar la medida, acciones de conversión y comparación)  -Perceptivas (dibujo)  -Verbales externas (escritura, exposición)	-Materializadas (cubos de bancubi y material Montessori)  -Perceptivas (dibujo concreto)  -Verbales externas (escritura)

En el colegio K la maestra trabaja con acciones desde el plano materializado, después propone acciones perceptivas y verbales externas (escritura y exposición). Nuevamente observamos que los alumnos realizan acciones relacionadas con la identificación, comparación de las características del concepto de número, por ejemplo, en las acciones materializadas utilizan tiras de hojas para representar la medida en el tema de fracciones, posteriormente los alumnos dibujan dicha medida en ejercicios impresos que la maestra diseña, además de representarlas matemáticamente, finalmente, de forma indirecta se observó que los alumnos realizan las acciones verbales externas, al explicar a sus compañeros la forma de solución (exposición por parejas).

Por su parte, el colegio M también trabaja con acciones materializadas-abstractas, perceptivas (concreto- esquemas) y verbales externas (escritura). Las cuales tienen relación procedimental y de abstracción (Ramírez y Block, 2009); primero los alumnos utilizan su material para realizar acciones de identificación, comparación y

conversión de medidas. Después, en su libro bancubi o ejercicios diseñados por las maestras se les pide formar dichos modelos, dibujarlos y representar con números los resultados. Finalmente, los alumnos pueden apoyar a sus compañeros explicando su procedimiento. Por ejemplo, la maestra enseñó la tabla de Pitágoras con un modelo materializado (material Montessori; collares de perlas representando unidades, una perla igual a una unidad, dos perlas igual a dos unidades... diez perlas igual a una decena). La maestra explicó la relación entre el aumento de las cantidades (primera fila arriba igual a factor; primera columna igual a factor; relación entre estos- producto). Posterior a la construcción de este modelo, la maestra les solicitó a los alumnos representar la cantidad y resultados de la tabla de Pitágoras con bolitas dibujadas. Finalmente explicar entre ellos (con su compañero de mesa) que productos eran binomios perfectos y qué multiplicaciones deberían aprenderse. El uso de estos modelos, de acuerdo con Davidov (1988) solo son representaciones sensoriales de cierto tipo de objetos, por lo que su forma es semejante a los objetos que representa, es decir, un cubo representa un cubo, otro cubo representa 10 cubos, solo muestran aspectos particulares.

En el caso del colegio S, las acciones que realizan los alumnos son en su mayoría solo en el plano verbal externo en su modalidad escritura. Lo anterior conduce al hecho de que los alumnos no logran explicar sus resultados de forma reflexiva, sino solo operativa. Las acciones también las observamos de forma aislada, no existe una tarea en diversos planos de acciones. La maestra les pide solucionar con los algoritmos o dibujar la cantidad que el número representa, como se observó en el tema de la balanza.

El cuarto elemento es sobre el tipo de colaboración que existe en el aula. La primera es la de objeto-niño, la cual considerando las investigaciones de Castro (2007), Talizina (2017) y López y Alsina (2015) puede ser pasivas o activas, es decir, solo la manipulación del objeto sin sentido o la transformación tanto del objeto como del sujeto.

En la siguiente tabla (56) mostramos un resumen los tipos de colaboración que existen en los colegio.

Tabla 56. Elemento de tipo de colaboración en cada colegio

Colegio S	Colegio K	Colegio M
Alumno-objeto: no existen.	Alumno-objeto: acciones materializadas (hoja como medida)	Alumno-objeto: acciones con cubos.
Alumno-alumno: verificación de resultados.	Alumno-alumno: apoyo mediante la explicación verbal y perceptiva, colaboración para solucionar, preguntas sobre instrucción (recordar o afirmar).	Alumno-alumno: solución de tareas conjuntas, verificación de resultados, apoyo.
Maestra-alumno: explicación del tema, incitación de respuestas, repetición.	Maestra-alumno: explicación del tema, preguntas dirigidas, repetición de explicación.	Maestra-alumno: explicación del tema, acompañamiento-reflexión-observación.

En el colegio K observamos la manipulación del objeto de forma activa, con un significado matemático (función simbólica y como signo artificial), esto en el plano de acciones materializadas. Además, identificamos que los alumnos dejan este objeto tan pronto han pasado a realizar acciones escritas. En el colegio M, la relación del niño-objeto es activa aunque limitada a casos concretos. Los alumnos han asimilado el sistema numérico decimal con el material y en tareas de repetición de 40 entre 5, ellos toman 4 cubos azules porque son 4 decenas y dibujan cinco números 1, sin embargo al ver que no es posible, convierten en unidades y ocupan los cubos verdes (unidades), repartiendo uno por uno. Para los alumnos, es difícil operar sin ver los objetos y en cada tema los continúan utilizando, aunque sea mínimo su uso. En realidad se trata de acciones con objetos porque el material no representa el contenido matemático ni facilita las acciones matemáticas para formar conceptos.

En contrastaste, en el colegio S no hay interacción con objetos solo con símbolos (cifras). Como segunda relación se plantea la de niño-niño, la cual en el colegio S

observamos que los alumnos se hablan para confirmar resultados o instrucciones, casi no colaboran entre ellos. Al respecto, la maestra también había comentado que en su opinión los alumnos ya no quieren realizar tareas de forma colaborativa, por lo que ella misma prefiere no proponerlas.

En el colegio K los niños se apoyan cuando tienen dudas e inclusive ellos piden apoyo de sus compañeros. Las preguntas son necesarias para la solución del ejercicio, aunque percibimos que en ocasiones primero solucionan de forma individual para después explicar a sus compañeros, especialmente se observó a una alumna explicarle a su compañero cómo resolver el ejercicio, la alumna organizó las instrucciones tanto generales (como coloca tu medida de este lado, observa...) como matemáticas (recuerda que debes identificar tu medida, si es cuatro debes colocar cuatro tiras para formar una unidad). Otra actividad que la maestra propone es la exposición por parejas de la forma de solución de algunos ejercicios, durante la cual los alumnos participan y se corrigen entre ellos. Estas situaciones son consideradas como contribución a la producción colectiva argumentativa, en las cuales de acuerdo con Krummheuer (2012) los alumnos muestran mayor dominio del contenido matemático que en tareas que implican solo reproducción de datos y conclusiones directas.

El caso del colegio M, el acompañamiento es necesario en el aula, ya sea maestra-alumno o alumno-alumno. En este colegio se enfatiza en la colaboración y trabajo en equipo, debido a que tienen actividades ya sea grupal, en parejas o individuales. Estas actividades pueden ser tanto escolares como cotidianas (comer, limpiar, comunicación, etc.). Las maestras tienen un acercamiento positivo con los alumnos, no gritan o dan comentarios negativos hacia los alumnos.

En el colegio S, la relación entre maestra-alumnos es adecuada, la maestra tiene una actitud positiva aunque al ser el único grupo de tercer grado en ocasiones habla con un tono de voz fuerte. Los alumnos tienen poca relación entre ellos, solo se hablan para verificar resultados, no se observó que se ayudaran, por ejemplo una alumna necesitaba tijeras y los compañeros que estaban cerca se las negaron.

En relación con la actitud de los alumnos ante las matemáticas, en los tres colegios los alumnos expresaban agrado hacia las tareas matemáticas, a ninguno le desagradó. Aunque dos alumnas del colegio S si mostraron preocupación al resolver

las tareas en la evaluación, y dos alumnas del colegio M expresaron que no les agrada mucho porque las perciben difíciles.

Por último, como resultado de la aplicación del protocolo de evaluación a los niños, en la dimensión de conceptos matemáticos que han asimilado los alumnos se hace evidente la relación entre el método de enseñanza y los conceptos que desarrollan los alumnos, descritos de forma general en los supuestos. En la siguiente tabla (57) se muestran los conceptos y habilidades matemáticas identificadas en nuestra investigación.

Tabla 57. Conceptos y habilidades matemáticas de los alumnos

Colegio S	Colegio K	Colegio M
Ausencia de concepto de número	Concepto de número	-Identificación de la cantidad.
Solución de operaciones matemáticas de suma y resta en el plano mental	Acciones de comparación y conversión de medidas, aunque aún no se consolida la comparación de medidas de tiempo.	-Identificación y comparación de sistemas de medidas con apoyo del material bancubi
Estrategia de estimación de resultados (ensayo y error), conteo con dedos.	Solución de operaciones matemáticas en acciones verbales y solución de algoritmos.	Solución de problemas que implican aumento de una medida, disminución y repartición con apoyo del material bancubi.

Colegio S	Colegio K	Colegio M
Solución de problemas a partir de la identificación de datos y la operación. Respuestas sobre las operaciones matemáticas	Solución de problemas matemáticos de forma reflexiva y operativa (en ocasiones no atienden la pregunta final)	Dificultad para atender pregunta final y relacionar los datos en los problemas que implican más de una acción matemática o relaciones que no se perciben de forma directa (km/h). Uso del material para resolver los problemas.

La maestra del colegio K comprende conceptos generales de las matemáticas, los cuales los niños identifican y realizan en diversos planos. No obstante, observamos que aún no aprenden a utilizar las medidas de tiempo y el componente lógico aún no se consolida.

Por su parte, las maestras del colegio M (maestra de matemáticas y titular) al conocer definiciones y utilizar material para realizar tareas matemáticas con estos han logrado que los alumnos comprendan el sistema numérico decimal con apoyo del material bancubi, así como el proceso de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Además, estos alumnos intentaban constantemente resolver las tareas solicitadas, trabajan hasta concluir las tareas y podían compartir con sus compañeros.

Por otro lado, la maestra de colegio S, al trabajar en su mayor parte las operaciones matemáticas, los alumnos tienen mecanizados algunos algoritmos y procedimientos, aunque comenten mayores errores en la solución escrita, no concluyen los algoritmos de división. Además, identificamos que dos alumnos tenían mayormente mecanizado cálculos simples, pero se les dificultaba representar sus resultados matemáticamente, es decir, a partir de signos matemáticos. En estos casos percibimos que ambos alumnos tenían apoyo de un familiar, en un alumno la abuela

había trabajado como maestra de matemáticas, mientras que en el segundo había un familiar quién lo ayudaba a estudiar.

La tarea de solución de problemas es considerada una actividad intelectual (Talizina 2009; Solovieva, 2004), no solo requiere del conocimiento de las operaciones matemáticas sino también de habilidades del pensamiento lógico. Estas tareas permiten observar cómo los alumnos identifican las características de los conceptos matemáticos y cómo ellos crean o reproducen sus relaciones esenciales (Tsvetkova, 1999). Por lo que fue posible de forma general observar que solo la maestra del colegio K intenta organizar dicha actividad intelectual mediante el uso de una tarjeta de orienta al pensamiento y la identificación de las características del concepto de número. En los otros colegios (S y M) la tarea de solución de problemas es un ejercicio más, en el colegio S se enfoca a la identificación de operaciones matemáticas mediante palabras claves, mientras que en el colegio M nuevamente se observa el trabajo con representaciones sensoriales que también son ancladas a las palabras.

Además, percibimos que los alumnos del colegio K identificaban las características del concepto de número y su relación, así mismo lograron la redacción de sus propios problemas y a partir de datos dados por la investigadora, e incluso los alumnos logran el carácter voluntario, ellos deciden qué tipo de problema redactarán antes de hacerlo. Los alumnos del colegio M, al trabajar en clases acertijos y no tener una estructura, tenían dificultades para resolver problemas que no se asociaban a situaciones cotidianas y dificultan que los alumnos identifiquen el sentido matemático (Ramírez y Block, 2009; Verschaffel, 2012). No obstante, con ayuda verbal asociada al material bancubi, el dibujo concreto y con el material bancubi los alumnos resolvieron los problemas simples y complejos. Por su parte, los alumnos del colegio S en su mayoría lograron redactar problemas de forma libre, al tener datos tenían dificultades para redactar una situación, estos alumnos presentaban las dificultades que son reportadas en las investigaciones de Silva (2009) y Castro (2007). Estos autores han dado un panorama de las habilidades que los alumnos de educación básica desarrollan en México y España correspondientemente.

En resumen, logramos identificar algunas similitudes entre estos tres métodos (Colegio K, M y S). Se observó que existe un contenido matemático (conceptos, definiciones o solución de operaciones matemáticas), acciones perceptivas (dibujo concreto) y verbales (explicaciones), así como una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos. Las tres maestras logran resultados en sus alumnos de acuerdo con su concepción sobre las matemáticas y planeación de sus tareas. Los alumnos del colegio K lograron identificar las características del concepto de número, lo que les permitió realizar acciones de conversión y comparación tanto en enunciados lógicos como en problemas matemáticos. Los alumnos del colegio M logran realizar los procesos de las operaciones de multiplicación y división mediante el apoyo de material bancario o Montessori, así mismo, la solución de problemas cuando no tienen un contenido cotidiano o concreto resulta un reto para ellos. Los alumnos de colegio S logran resolver operaciones matemáticas y buscan solo operar con los números sin conocer las características y significados matemáticos que tienen como bases esas operaciones.

Hasta aquí hemos analizado los elementos del método de enseñanza, dando un panorama más específico del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en tres colegios con diferentes perspectivas. Continuaremos comentando la posibilidad de identificar condiciones o elementos que favorecen u obstaculizan el aprendizaje de las matemáticas.

Como hemos descrito en los métodos de los tres colegios, nos fue posible suponer que el conocimiento de la asignatura de matemáticas (Lima y De Moura, 2017; Cortina, Zúñiga y Visnovska, 2013;) favorece su enseñanza. El maestro que tiene claridad de los conceptos puede dar diversos ejemplos, de forma cotidiana y planteando uno u otro plano (teórico-práctico). La orientación que cumple con las características de los conceptos y la sistematización de las acciones es otra condición que permite a los alumnos concentrarse y reflexionar sobre las tareas solicitadas (Beltrán, Leite y Vinícius, 2018; Solovieva y Quintanar, 2018). Si bien es cierto que los grupos del colegio M y K tienen una cantidad menor de alumnos, fue posible observar que la distribución de los alumnos (K: semi-círculo; M: tapete) y la maestra al centro permitía que ellos no solo observaran a la maestra sino también a

sus compañeros, así como la corrección inmediata de las maestras en ambos colegios. Específicamente observamos que en las clases del colegio M, las maestras le dan un tiempo oportuno a los alumnos, esperan y acompañan hasta que ellos observen o realicen la indicación solicitada, esto motiva a los niños a realizar las tareas y avanzar conforme van dominando el material. Desafortunadamente, en el colegio S al estar sentados en filas y ser más alumnos no era posible su corrección inmediata ni el monitoreo entre los mismos alumnos, como se describió e incluso su tipo de colaboración era principalmente individual.

Otra aplicación positiva de la orientación fue el constante énfasis de los elementos relevantes para solucionar las tareas. En el colegio K observamos que la dirección de las maestras contenía los elementos relevantes, mismos que los alumnos asimilaban y daban como apoyo para sus compañeros. En el colegio K, el caso de la alumna quién ayudó a su compañero a resolver una tarea de suma de fracciones en el plano materializado es un ejemplo de este tipo de orientación. De forma más concreta, identificamos que en el colegio M, dos alumnos se apoyaban para realizar una medición de un edificio con apoyo de su material bancubi y el centímetro cuadrado materializado, aunque la dificultad se observa cuando se debe generalizar ese contenido a otros temas de las matemáticas.

Contrario a este tipo de trabajo son los alumnos que solo realizan operaciones matemáticas (colegio S). Ellos solo las mecanizan pero no pueden desprenderse de su elemento concreto. Si bien es cierto que las matemáticas incluyen acciones mentales (cálculo mental), la simple asociación o estimación de resultados desorganiza esa automatización y conlleva a errores más complicados de superar. Las maestras que trabajan el cálculo mental deberían considerar su objetivo, es decir, si quieren lograr que los niños respondan más rápido y sin el uso de otros materiales. Este objetivo es posible si se llevan de forma consciente y reflexiva con los alumnos, pero para esto hay que pasar por diferentes planos de acción (material, perceptivo, lenguaje externo, lenguaje interno) y formar conceptos como lo propone Talizina (2017), Galperin (2009).

El trabajo en clase con material es una condición que favorece el desarrollo del pensamiento matemático, no obstante, este material debe permitir realizar acciones matemáticas, es decir, ese material debe tener un significado matemático y tener la

posibilidad de su generalización. Esto es de suma importancia en el aprendizaje de conceptos matemáticos, los alumnos forman dichos conceptos con un fondo significativo, el solo hecho de manipular objetos no es garantía de que los alumnos puedan formar conceptos, sino ellos deben realizar las acciones propias de las matemáticas. En el colegio K se utilizan objetos con un significado que es posible generalizar (trabajo con conceptos y medida) de forma abstracta (colegio K). Sin embargo en el colegio M se trabaja con la asociación matemática-objeto y observamos una dificultad en cuanto a romper con la percepción directa, mientras que en el colegio K, al trabajar siempre con la acción de medición y la medida los alumnos pueden nombrar medida a un objeto que les permita realizar dicha acción (listón, trozo de papel, lápiz, etc.). Como opuesto, en el colegio S se observa el trabajo solo con la escritura o con números recortado, pero al final cantan siendo solo imagen que no tiene un sentido.

Otro elemento positivo para el aprendizaje fue la tarea de solución de problemas. Los alumnos al trabajar con conceptos saben qué contenido deben identificar y reflexionan sobre la relación entre los números. Observamos que las palabras claves, que se utilizó en el colegio S fueron positivas para los alumnos relacionar con las operaciones matemáticas. Atender y trabajar en la función orientativa de la pregunta final es fundamental para esta tarea, como se ha observado en las investigaciones de Tsvetkova (1999), Solovieva, Rosas y Quintanar (2016) el iniciar con el análisis de la pregunta final organiza el pensamiento y la forma de dar una solución exitosa. En el colegio S y M no se observó el trabajo con la pregunta final, por lo que los alumnos daban respuestas incompletas.

Finalmente, comentaremos algunas aportaciones teóricas y prácticas de esta investigación. A nivel teórico fue posible construir un concepto para el análisis del proceso de enseñanza de aprendizaje de las matemáticas, el método de enseñanza, producto de la revisión de los trabajos de Talizina (2000; 2009), Galperin (2009), Nikola y Talizina (2017), Butkin (2017), Zárraga, Solovieva, Quintanar y García (2012), Rosas, Solovieva y Quintanar (2014), Rosas (2012). Son propuestos como principales conceptos matemáticos en educación básica el concepto de número y sistema numérico. El concepto de método de enseñanza permitió mostrar a las maestras su forma de enseñanza y la relación con el aprendizaje de sus alumnos.

Es necesario que este contenido incluya las operaciones matemáticas y manipulación del material pero ninguno de forma aislada, sino como producto de las relaciones entre la magnitud, la medida y cantidad de veces utilizada.

En el nivel práctico fue posible dar sugerencias específicas para mejorar la forma de enseñanza. Por ejemplo en el colegio S trabajar la solución de problemas como una actividad intelectual y no solo la solución de algoritmos, así mismo en el colegio K, orientar esta actividad a partir de la pregunta del problema. En el colegio M es posible trabajar la solución de problemas mediante una estructura que permita orientar a los alumnos en la pregunta final, con situaciones no solo cotidianas sino que impliquen relaciones matemáticas. Resulta necesario mostrar esas relaciones matemáticas mediante el uso de cubos como material conocidos para los alumnos.

Así el énfasis en que los cursos de profesionalización y certificaciones no sean solo un curso más que no sea posible aplicar en las aulas escolares o solo aumentar el conocimiento que tienen (Rodríguez y Vera, 2007). Proponemos que estos cursos contengan un apartado para organizar y sistematizar métodos de enseñanza con un fundamento teórico-metodológico y no solo sea la administración o repetición de estrategias que funcionan para algunos alumnos. Es necesario considerar aspectos psicológicos de trabajo con los niños como formas de orientación y niveles de las acciones, en las cuales esta orientación puede ser introducida.

Además, esta investigación aporta a nivel metodológico el acercamiento hacia el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante los instrumentos elaborados (entrevista semi-estructurada para el docente, observación de clase y evaluación dinámica de los alumnos). Estos instrumentos se elaboraron sobre el paradigma histórico-cultural y específicamente la teoría de la actividad, y no solo hacia la medición de variables ajenas o únicas al contexto escolar. Por ejemplo, la evaluación que fue utilizada (dinámica) en acuerdo con lo establecido por Vygotsky (2006), nos permitió conocer el desarrollo de los conceptos en los alumnos, brindar apoyos y evitar que los alumnos tuvieran la percepción de un examen más. Consideramos que la evaluación dinámica podría predominar en las aulas para que los alumnos mejoren cada vez más su comprensión y ejecución. Observamos que el libro que manejan en el colegio por competencias les permite a los alumnos realizar una autoevaluación pero

solo sirve para identificar que logran y que aún no a nivel operativo, no se orienta hacia qué tipos de apoyo necesitan ni cómo desarrollar esas habilidades.

Dentro de las limitaciones, la restricción de la videograbación de las clases en el colegio M dificultó capturar información de forma literal para su posterior análisis. Sin embargo, consideramos que al ser el tercer colegio con el que se trabajó, ya se tenía mayor manejo de la hoja de observación de clase. Este trabajo no pretende generalizar los resultados, fueron elegidos tres colegios con diferentes perspectivas pero somos conscientes de que no son los únicos ni suficientes, aunque si los necesarios para lograr los objetivos planteados en esta investigación.

Otra limitación fue el superar el tema de la comparación de los colegios, no fue posible evitar el análisis horizontal (entre escuelas) pero nunca fue hacia una valoración moral o personal, sino de los elementos del método de enseñanza y a nivel teórico-práctico, retomando a Valdés (2018), construimos un concepto para resolver problemas teóricos-prácticos. El objetivo es buscar los elementos o la forma de enseñanza que favorece el desarrollo de conceptos matemáticos, consideramos que este trabajo puede dar una visión general y conocimiento para intentar una enseñanza que incluya los conceptos matemáticos necesarios en la educación básica.

La limitación de encontrar colegios con las mismas características contextuales fue importante para evitar la adjudicación de la enseñanza- aprendizaje al contexto. Estamos de acuerdo con que son tres contextos diferentes con perspectivas también diferentes, sin embargo existen conceptos propios de las matemáticas que se deben mantener independientemente de los contextos sociales. No imaginamos algún contexto cultural que niegue el concepto de número o no enseñe los procedimientos matemáticos, así como maestros que estudien solo para enseñar en una zona rural o suburbana. La diferencia se encuentra en la importancia que se le da a los contenidos y a su forma de enseñar, así como su visión del proceso de enseñanza- aprendizaje, por lo que consideramos que los datos describen tres formas diferentes de enseñar y los resultados que obtienen desde una mirada de la Psicología.

Es posible proponer como futuras investigaciones realizar el análisis de los métodos de enseñanza de las matemáticas en otros temas, por ejemplo, la geometría o la estadística, debido a que estos también son parte del programa oficial y es

necesario identificar qué concepto además del de número deben formarse, y mediante qué acciones. Sin duda, el concepto de número es esencial como se ha mostrado en las investigaciones de Solovieva, Ortiz y Quintanar (2010), Rosas, Solovieva y Quintanar (2017). Además, proponemos el trabajo con grupos de cantidad mayor de alumnos para poder identificar y organizar una forma de enseñanza que favorezca a todos los alumnos.

## **Conclusiones**

- a. Las matemáticas pueden ser enseñadas de forma conceptual o empírica. La primera implica que los maestros conozcan los conceptos matemáticos y basen su enseñanza en una teoría del desarrollo psicológico. La segunda forma es la más común y se basa en realizar solo operaciones concretas.
- b. Los contenidos matemáticos que prevalecen en dos aulas escolares son relacionados con la solución de algoritmos u operaciones, los cuales son enseñados de forma aislada. La solución de problemas es considerada como una tarea que tiene como objetivo resolver una operación. Solo en un colegio estudiado se observó la enseñanza del concepto de número y a partir de la relación entre sus características esenciales las operaciones matemáticas (suma, resta, multiplicación, división, fracciones). Así como, considerar la solución de problemas como actividad intelectual.
- c. Las maestras que enseñan matemáticas requieren de cursos de profesionalización que incluyan elementos teórico-metodológicos reales al desarrollo de los conceptos matemáticos, no es suficiente que tengan un programa y material que no saben cómo relacionar con los contenidos matemáticos.
- d. La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas genera condiciones favorables para el desarrollo conceptual cuando incluye: conceptos matemáticos y no solo definiciones, acciones en los planos materializados-perceptivos y verbales externo, el material permite realizar acciones matemáticas que posteriormente se sustituyen por el sistema de

numeración, no basta su simple asociación (objeto-cifra). Se trabaja mediante la estructura de la actividad intelectual, enfatizando en el objetivo y en los elementos orientativos (conceptuales, procedimentales). También cuando incluye el trabajo grupal y entre alumnos.

- e. En relación con el objeto de estudio (el método de enseñanza) es posible proponerlo como una categoría o forma de análisis que permite identificar, analizar y organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la educación básica. Los elementos del método de enseñanza, tales como sistema de conceptos, tipo de orientación, acciones, colaboración (alumno-objeto, maestro-alumno, alumno-alumno) y desarrollo de conceptos matemáticos brindan un panorama general sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la escuela primaria. Consideramos que esta unidad de análisis integra elementos que han sido investigados de forma aislada y que limita la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje. Es una unidad que parte de una teoría y es posible estudiarla en la actividad de los maestros dentro del aula.
- f. El método de enseñanza de cada colegio brinda información general sobre el objetivo de enseñanza de las matemáticas y los resultados que obtienen las maestras, a partir de esto, es posible seguir enfatizando en la formación de conceptos matemáticos, los cuales no siempre son conocidos por las mismas maestras.
- g. La enseñanza de las matemáticas requiere de la formación de acciones de diversos planos que relacionen el conocimiento matemático, por ejemplo, en el Colegio K, existe la acción de medición en el plano materializado (uso de hojas como medida), en el plano perceptivo concreto (dibujo de esa medición), el plano verbal externo (solución de operaciones). Lo anterior permite que los alumnos identifiquen las características esenciales y relacionen en diversas tareas.
- h. El uso de objetos reales para realizar acciones matemáticas favorece al desarrollo de la función simbólica y conceptos. Los alumnos logran una generalización del concepto de número cuando pueden utilizar cualquier objeto para representar acciones matemáticas, no solo como un símbolo

sino también como un signo artificial, mientras que los alumnos que solo manejan un tipo de objeto se centran en características del propio objeto a partir de información sensorial y tienen dificultades para comprender las relaciones matemáticas.

- i. La actividad de solución de problemas matemáticas requiere de una estructura para identificar las relaciones matemáticas, siendo primordial la identificación de la pregunta del problema. Se observó que la mayoría de los alumnos no atendía la pregunta y cometían errores al operar solo con los datos de forma directa, cuando se les pedía identificarla su proceso de solución era organizado y lograban dar la solución correspondiente.
- j. Los tipos de colaboración positiva entre el maestro-alumno es fundamental para desarrollar el agrado hacia las matemáticas. Las maestras que muestran una actitud positiva y generan la curiosidad en los alumnos logran formar un gusto por aprender matemáticas. Además, mostrar las acciones generales y necesarias ayuda a que los alumnos perciban las matemáticas como accesibles para ellos. Por el contrario, la exigencia de resultados exactos en cierto tiempo influye en el estado emocional de los alumnos, quienes muestran preocupación por no lograr las tareas.
- k. Los tipos de colaboración positiva entre alumno-alumno permite consolidar y dominar los conocimientos adquiridos en clase, los alumnos al tener claridad de las acciones pueden orientar y ayudar a sus compañeros para solucionar las tareas. La ausencia de esta colaboración influye en la motivación y desempeño de los alumnos.
- l. La colaboración positiva y afectiva permite la convivencia entre los alumnos, darles tiempo para expresar sus ideas, permitirles convivir no solo académicamente, favorece el agrado hacia las actividades escolares y a la independencia. El discurso que no contiene un tono o palabras agresivas permite que los alumnos participen, trabajen por ellos mismos y soliciten ayuda específica a los maestros.
- m. El tipo de orientación general, independiente y completa favorece la formación de conceptos matemáticos. El uso de este tipo de orientación no es específico de la investigación, es posible que los maestros organicen y apliquen en el aula, pero se requiere que conozcan los conceptos, uso de

objetos que permitan las acciones matemáticas, y diversos medios para mostrar y orientar el contenido de los conceptos (tarjetas de orientación).

- n. El método de enseñanza que contiene conceptos científicos desarrolla en los alumnos una mejor zona de desarrollo próximo, es decir, los alumnos pueden cometer errores pero ellos los corrigen de forma individual y reflexiva.
- o. Como principal limitación identificamos enfocarnos solo en escuelas primarias privadas y solo en un área de las matemáticas (aritmética). Consideramos que estudiar qué sucede en las escuelas públicas daría mayores elementos de análisis, así como indagar los contenidos específicos del área de geometría y estadística que son vistos en la escuela primaria.

## Referencias bibliográficas

- Álvarez, A. y Del Río, P. (2013) El papel de la educación en el desarrollo: de la escuela a la cultura. *Cultura y Educación*, 24 (2), pp. 137-151.
- Álvarez, M. (2001). Neuropsicología de la alteración de la atención voluntaria en el TDA. En Solovieva Y. y Quintanar L. (Ed.) (2001). *Métodos de Intervención en la Neuropsicología Infantil*. México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Arévalo, E. (2015) ¿Cómo enseñan las matemáticas en la escuela primaria? *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
- Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. México: Paidós.
- \_\_\_\_\_ Block, D. y Carbajal, A. (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. En: López, A. (2003). *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos: procesos de enseñanza y aprendizaje: Tomo I: el campo de la educación matemática 1993-2001*. México: Consejo mexicano de investigación educativa.
- \_\_\_\_\_ (2011). En matemáticas ¿qué nos dejaron las reformas de fin de siglo XX? *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 9.
- Backhoff, E.; Bouzas, A.; Contreras, C.; Hernández, E. y García, M. (2007). *Factores escolares y aprendizaje en México. El caso de la educación básica*. INEE: México.
- Barbosa, A., Galdolfo, M. y Mitjans, A. (2016). Epistemología cualitativa de González Rey: una forma diferente de análisis de datos. *Revista Tecnía*, 1 (1), pp. 17-30.
- Beltrán, I., Leite, B. y Vinícius, M. (2018). A formação de habilidades gerais no contexto escolar: contribuições da teoria de P. Ya. Galperin. En: Beltrán, I. y Leite, B. (2018). *Galperin e a teoria da formação planejada por etapas das ações mentais e dos conceitos. Pesquisas e experiências para um ensino inovador*. Campinas, SP: Mercado de letras.

- Bodaliev, (1978). Sobre los problemas de la educación y su estudio. En Iliasov, I. y Liaudis, V. (1986). *Antología de la Psicología Pedagógica y de las edades*. Habana: Pueblo y educación.
- Buenrostro, A. (2003). Aritmética y bajo rendimiento escolar. *Tesis de doctorado en ciencias en la especialidad de matemática educativa*. Centro de investigación y estudios avanzados del IPN.
- Butkin, G. (2017). La formación de las habilidades que se encuentran en la base de la demostración geométrica. En: Talizina, T., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). *Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad*. México: CEIDE.
- Butto, C. y Gómez, L. M. (2011). Las representaciones del sistema numérico decimal indo-arábigo en niños de primer grado de primaria. *XIX Congreso Mexicano de Psicología*. Cancún Center, Cancún, Quintana Roo, México.
- Cacéres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: una metodología lógica alcanzable. *Psicoperspectivas*, 2, pp. 53-82.
- Campos, M. (2009). *Métodos y técnicas de investigación académica. Fundamentos de investigación bibliográfica*. Universidad de Costa Rica.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (1), pp. 5-17.
- Castaño, J. (2008). Una aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y semióticas. *Univ. Psychol.*, 895-907.
- Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 11, pp. 59-77.
- Cervantes, J. (2009). *Desarrollo de protoconceptos históricos. Una propuesta desde la Psicología histórico-cultural*, México, Universidad de Guadalajara.
- Chavarría, M. (2012). ¿Está Montessori obsoleta hoy? A la búsqueda del Montessori posible. *Rev. Rupturas*, 2 (1), pp. 58-117.
- Contreras, L. (1989). El concepto de número del niño preescolar. *Revista SUMA*, No.3, pp. 29-39.

- Contreras, S. y Contreras, A. (2011). Estilos de aprendizaje del profesor y sus estilos de enseñanza. *XIX Congreso Mexicano de Psicología*. Cancún Center, Cancún, Quintana Roo, México.
- Coronado, A. (2008). Dificultades del aprendizaje de las matemáticas: conceptos básicos y diagnóstico. *Revista de Humanidades*, 15, 237-252.
- Cortina, J. L., Zúñiga, C. y Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Revista de educación matemática*, 25 (2).
- Cruz, S., Chacón, Y., Yáñez, A. y García, M. (2014). Práctica docente y enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de educación primaria. En: Ramos, M. y Aguilera, V. (eds.) (2014). *Educación. Handbook*. Guanajuato: Valle de Santiago.
- Davíдов, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscú: Progreso.
- \_\_\_\_\_. (1974). Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. En: Davíдов, A. y Shuare, M. (1987). *La Psicología evolutiva y Pedagógica de la URSS. Antología*. Moscú: Progreso.
- Elkonin, (2016). La formación de la personalidad del niño y las actividades creativas en la infancia. Seminario Internacional en Psicología “El enfoque cualitativo en Psicología y Neuropsicología”. Centro de convenciones Puebla, noviembre.
- Erickson, F. (1997). Métodos cualitativos sobre la enseñanza. En: Wittrock, Merlin (comp.) *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona: Paidós. pp. 195-203.
- Espinoza, L., Barbé, J. y Gálvez, G. (2011). Limitaciones en el desarrollo de la actividad matemática en la escuela básica: el caso de la aritmética escolar. *Estudios pedagógicos*, 37 (1).
- Flick, U. (2007). Investigación cualitativa: Relevancia, historia y rasgos (Capítulo 1 y 2). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata. pp. 15-42.
- Galperin, P. Ya. (2009). La formación de los conceptos y de las acciones mentales. En Quintanar, L. y Solovieva, Y. (2009) (Comps.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño*. México: Trillas.
- \_\_\_\_\_. (2001). Sobre la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos. En Quintanar, L. y Solovieva, Y. (2009) (Comps.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño*. México: Trillas.

- \_\_\_\_\_ (1969). Sobre la investigación del desarrollo intelectual el niño. En: Dávídov, A. y Shuare, M. (1987). *La Psicología evolutiva y Pedagógica de la URSS. Antología*. Moscú: Progreso.
- \_\_\_\_\_, Zaporozhets, A. y El Konin, D. (1963). Los problemas de la formación de conocimientos y capacidades en los escolares y los nuevos métodos de enseñanza en la escuela. En: Dávídov, A. y Shuare, M. (1987). *La Psicología evolutiva y Pedagógica de la URSS. Antología*. Moscú: Progreso.
- García, O. (2011). Las matemáticas naturales del niño y su transición a la educación formal en la escuela formal. *XIX Congreso Mexicano de Psicología*. Cancún Center, Cancún, Quintana Roo, México.
- García, A., Vázquez, J. y Zarcosa, L. (2013). Solución estratégica a problemas matemáticos verbales de una operación. El caso de la multiplicación y la división, *Educación matemática*, vol. XXV, núm. 3, pp. 103-128.
- Girola, L. (1992). Teoría sociológica y fin de siglo. *Revista Mexicana de Ciencias Políticas y Sociales*. Vol 3, núm. 148, pp.125-139.
- Gómez, L. (2014), "De lo concreto a los abstracto: enseñanza en contexto" en: Gómez, Luis (coord.), *La enseñanza de las matemáticas en secundaria*, México, ITESO, pp. 117-144.
- \_\_\_\_\_. (1997). *La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva sociocultural del desarrollo cognoscitivo*. Tlaquepaque: ITESO.
- González, C. (2016). El juego de roles sociales como medio de formación de la función simbólica en niños preescolar. *Tesis para obtener el título de Doctor en educación*. Universidad Iberoamericana Puebla.
- González, M. (2001). El método Montessori como alternativa para elevar la calidad del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas en el primer grado de educación primaria. *Tesina para obtener el grado de Licenciada en educación primaria*. Universidad Pedagógica Nacional, Morelos.
- González, L. (2001). *Investigación cualitativa en Psicología: Rumbos y desafíos*. México: Parahinfo.
- Hernández, G. (2006). *Paradigmas en Psicología de la educación*. México: Paidós.
- INEE (2012). *El aprendizaje en sexto de primaria en México. Informe sobre los resultados del Excale 06, aplicación 2009. Español, Matemáticas, Ciencias Naturales y Educación Cívica*. México: INEE.

- Iflazoglu, A. y Pinar, A. (2012). An analysis of teaching strategies employed in the elementary school mathematics teaching in terms of multiple intelligence theory. *Journal of theory and practice in education*.
- Izacara, S. (2009). *La praxis de la investigación cualitativa: guía para elaborar una tesis*. México: Plaza y Valdés.
- Jaik, A., Serrano, J., López, C., Amancio, G., Gómez, E. y Silva, R. (2008). Estudio comparativo entre dos modelos pedagógicos a nivel preescolar. *Investigación Educativa Duranguense*, 4 (9), pp. 21-32.
- Kofa, L. (2017). Elementary teacher's perceptions of matemathic Instruction in Montessori and a Traditional Classrooms. Doctoral study, Walden University. Recuperado en: <https://search.proquest.com/docview/1977906996>
- Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En: Planas, N. (coord.) *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. España: GRAÓ.
- Lázaro, E., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2013). Premisas psicológicas para la adquisición del cálculo. En: Sánchez, J. y Escotto, A. (2013). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: factores neuropsicológicos, afectivos y socioepistemológicos*. México: UNAM.
- Larrain, M. (2016). Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva. *Revista Iberoamericana de educación*, 45, pp. 152-161.
- Leontiev, A. A. (2006). "Units" and levels of activity. *Journal of Russian and East European Psychology*, 44 (3), pp. 30-46.
- Leontiev, A.N. (2003). *Selección de lecturas de Psicología del desarrollo*. La Habana: S/E.
- Lima, W. y De Moura, M. (2017). O conhecimento matemático do Professor em formação inicial: um análise Histórico-Cultural do processo de mudança. En: Dias, V. y Lima, W. (org.) (2017). *Educação e a teoria Histórico-cultural. Um olhar sobre as pesquisas*. Campina, SP: Mercado de letras.
- López, M. y Alsina, A. (2015). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en educación infantil. *Educación matemática en la infancia*, 4 (1), pp. 1-10.
- Lukas, J. (2014). *Evaluación educativa*. Madrid: Larousse - Alianza Editorial.

- Luria, A. R. y Tsvetkova, L. S. (1981). *La resolución de problemas y sus trastornos*. Barcelona: Editorial Fontanella.
- Martínez, G. (1984). El tránsito de la formación de conceptos matemáticos primarios a la solución de problemas aritméticos en niños de edad preescolar mayor y de edad escolar menor. *Revista Cubana de Psicología*, 1 (1).
- Miranda, C. (2005). Formación permanente e innovación en las prácticas pedagógicas en docentes de educación básica. *Revista Iberoamericana de Educación*, 1, pp. 63-78.
- Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis [28 paragraphs]. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, 1(2), Art. 20.
- Nikola, G. y Talizina, N. (2017). La formación de habilidades generales para la solución de problemas aritméticos. En: Talizina, T., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). *Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad*. México: CEIDE.
- Nolasco, H. (2005). Una propuesta para la enseñanza de la geometría en la educación primaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 155-160.
- Ngee-Kiong, P., Singh, P. y Hwa, T. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. *Educ. stud. Math*, 72, pp. 307- 324.
- Obújova, L. (1977). Dos vías para formar un sistema simple de conceptos científicos. En: Davidov, A. y Shuare, M. (1987). *La Psicología evolutiva y Pedagógica de la URSS. Antología*. Moscú: Progreso.
- Ortiz, G. (2007). La formación del concepto de número en escolares de una comunidad de habla náhuatl-castellana. *Tesis para obtener el grado de Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica*, Facultad de Psicología, BUAP.
- Parada, S. y Pluinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Relime*, 17 (1), pp. 83-113.
- Pehkonen, E., Näveri, L. y Laine, A. (2013). On teaching problem solving in school mathematics. *C-E-P-S Journal*, 3 (4), pp.9-23.
- Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Revista de Educación Matemática*, 21 (1).

- Rangel, J. y García, M. (2014). Fortalecimiento del desempeño de los niños de primero de primaria en la resolución de problemas de estructura aditiva: cambio y combinación. *Revista de docencia e investigación*, 4(2), pp. 63-82.
- Riverón, O.; Martín, J.; González, I. y Gómez, A. (2001). Influencia de los problemas matemáticos en el desarrollo del pensamiento lógico. *Revista Iberoamericana de educación*.
- Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los número racionales. *Avances de investigación de educación matemática*, 4, (47).
- Rosas, Y., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). Formación de concepto de número: aplicación de metódica en una institución mexicana. En: Talizina, T., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). *Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad*. México: CEIDE.
- \_\_\_\_\_. (2012). Formación de la acción de división en niños de segundo grado de primaria. *Tesis para obtener el grado de Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica*, Facultad de Psicología, BUAP.
- \_\_\_\_\_, Solovieva, Y., García, M. Y Quintanar, L. (2013). Formation of concept of decimal system in Mexican School children. *Psyjournal*, 1, pp. 1-24.
- \_\_\_\_\_, Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2014). Formación de las acciones de multiplicación y división en la escuela primaria. *POIÉSIS*, Junio, pp. 83-101.
- Rosas, D. y Rosas, Y. (2010). Formación del concepto de división partitiva en un grupo de tercer grado de primaria. *Tesis para obtener el grado de licenciatura en Psicología*, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM.
- Rodríguez, C. y Vera, J. (2007). Evaluación de la práctica docente en escuelas urbanas de educación primaria en Sonora. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 12, (35), pp. 1129- 1151
- Rubinstein, S. (1969). *Principios de Psicología general*. México: Grijalbo.
- Rubtsov, V. (1996). A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. En: Garnier, C., Berdnarz, N., Ulanovskaya, I. (Orgs.). *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista. Escola russa e ocidental*. Tradução: Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.129-137.

- Ruiz, A. (2001). Asuntos de método en la educación matemática. *Revista Virtual Matemática, Educación e Internet*. Recuperado el 22 de noviembre de 2015 en: <http://www.centroedumatematica.com/aruz/Articulos/Asuntos%20de%20metodo%20en%20la%20Educacion%20Matematica.pdf>
- Santiago, P., McGregor, D., Ravela, P. y Toledo, D. (2012). *Revisiones de la OCDE sobre la Evaluación en Educación*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Salmina, N. (2017). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En: Talizina, T., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). *Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad*. México: CEIDE.
- \_\_\_\_\_. (2015). Resultados nacionales 2015 de 6° de primaria y 3° de secundaria, Lenguaje y communications, Matemáticas. Recuperado en: <http://www.inee.edu.mx/index.php/planea>
- \_\_\_\_\_. (2013). *Evaluación Nacional de Centros Escolares (ENLACE)*. México: SEP.
- \_\_\_\_\_. (2011). Programa de estudio 2011. Guía para el maestro. Primaria, tercer grado. México: SEP.
- TERCE (2015). *Aportes para la enseñanza Matemática*. Chile: LLECE.
- Silva, M. (2009). Métodos y estrategias de resolución de problemas matemáticos utilizadas por alumnos de 6to grado de primaria. Recuperado en: [http://www.cimeac.com/images/2a\\_parte\\_reporte\\_final\\_inide.pdf](http://www.cimeac.com/images/2a_parte_reporte_final_inide.pdf)
- Silva, M. y Rodríguez, A. (2011). ¿Por qué fallan los alumnos al resolver problemas matemáticos? *Didac*, núm. 56-57, pp. 21-28.
- Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2018). Teoría de Galperin: orientación para Psicología y Neuropsicología. En: Beltrán, I. y Leite, B. (2018). *Galperin e a teoria da formação planejada por etapas das ações mentais e dos conceitos. Pesquisas e experiências para um ensino inovador*. Campinas, SP: Mercado de letras.
- \_\_\_\_\_, y Quintanar, Y. (2017). Desarrollo del pensamiento y la actividad reflexiva. *R. de Didat. e Psic. Pedag*, 1 (2), pp. 356-375.
- \_\_\_\_\_. (2016). *La enseñanza del lenguaje escrito. Metodología y actividades para la enseñanza*. México: Trillas.

- \_\_\_\_\_, Rosas, Y. y Quintanar, L. (2016). Program for solving problem as method for development of logic thinking in school children. *RIMEN*, 6 (2), pp. 111- 135.
- \_\_\_\_\_. (2015). *Estrategias introductorias de la lectoescritura en el idioma inglés*. México: Plaza y Valdés Editores.
- \_\_\_\_\_ y Quintanar, L. (2014). *Enseñanza de la lectura: método práctico para la formación lectura*. México: trillas.
- \_\_\_\_\_, Lázaro, E., Rosas, Y., Quintanar, L., Escotto, A. y Sánchez, G. (2014). Mathematics acquisition in Mexico: Research on teaching, acquisition difficulties, and correction. *Psychology and Neuroscience*, 7 (4), pp. 481-491.
- \_\_\_\_\_ (2013). El desarrollo desde el enfoque histórico-cultural: investigaciones educativas en España y México. *Cultura y Educación*, 25 (2), pp. 131-135.
- \_\_\_\_\_, Lázaro, E. y Quintanar, L. (2013). Evaluación de las habilidades matemáticas previas en niños preescolares urbanos y rurales. *Cultura y Educación*, vol. 25, núm. 2, pp. 199-212.
- \_\_\_\_\_ y Quintanar, L. (2010). El desarrollo del niño y métodos de enseñanza, *Elementos*, 79.
- \_\_\_\_\_, Ortiz, G. y Quintanar, L. (2010). Formación de conceptos numéricos iniciales en una población de niños mexicanos *Cultura y educación*, 20 (2).
- \_\_\_\_\_ (2004). *Desarrollo del intelecto y su evaluación. Una aproximación histórico-cultural*. México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Steele, D. (2001). Using sociocultural theory to teach mathematics: a vygotskian perspective. *School science and mathematics*, 101 (8), pp. 404-416.
- Sueanne, E.; Robinson, J. y Berube, T. (2013). "Real teaching" in the mathematics classroom: a comparison of the instructional practice of elementary teachers in Urban High School. *Teacher Education and Practice*, 26 (4), pp. 797-815.
- Suhit, G. y Bainaly, M. (2005). La mediación... Un factor fundamental en la construcción de aprendizajes significativos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 201-205.
- Thanheiser, E., Browning, C., Moss, M., Watanabe, T. y Garza, G. (2010). Developing Mathematical Content knowledge for teaching elementary school mathematics. *The journal*, 1, pp. 1-13.

- Talizina, N., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2010). La aproximación de la actividad en Psicología y su relación con el enfoque histórico-cultural de L. S. Vygotsky. *Novedades educativas*, 230, p. 4-8.
- \_\_\_\_\_. (2009). *La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza*. México: BUAP.
- \_\_\_\_\_. (2017). La formación de los conceptos matemáticos. En: Talizina, T., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). *Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad*. México: CEIDE.
- \_\_\_\_\_. (2000). *Manual de Psicología pedagógica*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- Tsvetkova, L. (1999). *Neuropsicología del intelecto*. La Habana: UAEM.
- Valdés, R. (2018). *Aprendizagem desenvolvimental e atividade de estudo: um dialogo com Zoia Prestes*. Grupo de estudos de pesquisa e desenvolvimento profissional docente. Palestra, 23 de novembro. Universidad Federal de Uberlândia.
- Valdés, R. (2017). Didática desenvolvimental da actividade: o sistema Elkonin-Davidov (1958-2015), *Obutchénie: Revista de Didáctica e Psicologia Pedagógica*, v. 1, n.1.
- Valdés, R. y Paulia, J. (2016). The study of Psychology of A. V. Zaporozhnetz. *Pedagogic and Psychology of education*, 2 (1), pp. 46-50.
- Valadarskaya, I. (2017). La formación de las habilidades generalizadas del pensamiento geométrico. En: Talizina, T., Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2017). *Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad*. México: CEIDE.
- Verschaffel, L. (2012). Los problemas aritméticos verbales y la modelización matemática. En: Planas, N. (coord.) *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. España: GRAÓ.
- Vygotski, L. (2008). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.
- \_\_\_\_\_. (2006). *El desarrollo de los procesos psicológico superiores*. Barcelona: Crítica.
- \_\_\_\_\_. (1995). *Obras escogidas Tomo 3*. Madrid: Visor.
- \_\_\_\_\_. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. *Infancia y aprendizaje*, 27-28, pp. 105-116.

- Zárraga, S., Quintanar, L.; García, M. y Solovieva, Y. (2012). Formación de las habilidades matemáticas básicas en preescolar mayores de una comunidad suburbana. *Educação e Filosofia. Uberlândia*, 26, pp. 157-178.
- \_\_\_\_\_. (2011). Formación de las habilidades matemáticas básicas en prescolares mayores de una comunidad suburbana. *Tesis para obtener el grado de Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica*, Facultad de Psicología, BUAP.
- Zaporozhets, A. Zinchenko V. y El Konin, D. (1979). El desarrollo del pensamiento viso-motor durante la edad preescolar. En Delval, J. (1979). *Lecturas de Psicología del niño. El desarrollo cognitivo y afectivo del niño y del adolescente*. Madrid: Alianza.
- Zilberstein, J. y Olmedo, S. (2017). Contribuyentes al estudio de la didáctica y los métodos de enseñanza. Aproximación a la vida y obra de Mikhail Nikolaevich Skatkin. En: Valdés, R. y Maturano, A. (org.) (2017). *Ensino Desenvolvimental: vida, pensamento e obra dois principais representantes rusos* (pp. 355-379). Uberlândia: EDUFU.

**Apéndice 1**  
**Entrevista para profesores**

Edad:		Grados en los que ha enseñado	
Grado que enseña		Grado académico	
Años de docencia		Últimos cursos de profesionalización	
Número de colegios		Tipo de colegio (privado, publico)	

I. Concepción de las matemáticas

1. ¿Qué son las matemáticas?

---



---



---

2. ¿Qué contenidos matemáticos considera que se enseñan en la primaria? ¿por qué?

---



---



---

3. ¿Qué contenidos matemáticos considera que se enseñan en tercero de primaria?

---



---



---

4. ¿Qué contenidos matemáticos le exige enseñar la Institución?

---



---



---

5. ¿Cómo cree que se enseñan esos contenidos?

---



---



---

6. ¿Qué actividades cree que se puedan utilizar para enseñar los contenidos de matemáticas?

---

---

---

## II. Sistematización del contenido

1. ¿Usted utiliza algún método particular para enseñar?

---

---

---

2. ¿En qué consiste? (tareas, estrategias, desarrollo de motivación)

---

---

---

3. ¿Este método qué objetivos tiene? (formación de conceptos, habilidades matemáticas, mecanización de habilidades)

---

---

---

4. ¿Desde cuándo aplica este método?

---

---

---

5. ¿Dónde aprendió a utilizar este método?

---

---

---

6. ¿Lo eligió usted o es requisito del colegio?

---

---

---

## III. Orientación

1. ¿Utiliza algunos materiales para enseñar los contenidos matemáticos?

---

---

---

2. ¿Cómo utiliza esos materiales?

---

---

---

3. Cuándo los alumnos tienen dudas ¿cómo resuelve esas dudas?

---

---

---

4. ¿Considera relevante las actividades grupales para el aprendizaje de las matemáticas? ¿por qué?

---

---

---

5. ¿En su enseñanza prevalece el trabajo colectivo o el trabajo individual?

---

IV. Logro de acciones

1. ¿Cómo verifica que los alumnos logren las tareas matemáticas?

---

---

2. ¿Qué tareas utiliza para evaluar el aprendizaje de las matemáticas?

---

---

3. ¿Qué contenidos matemáticos considera que son más difíciles de aprender para los alumnos? ¿por qué?

---

---

4. ¿Qué contenidos matemáticos considera más fáciles de aprender para los alumnos? ¿por qué?

---

V. Trabajo con conceptos

1. ¿Usted considera que existan conceptos matemáticos que deban enseñarse en la escuela primaria?

2. ¿Cuáles conceptos deberían formarse?

---

---

---

3. ¿Cuál es el concepto de número?

---

---

---

4. ¿Usted forma conceptos matemáticos? ¿cuáles conceptos? ¿cómo los forma?

---

---

---

5. ¿Cuáles considera que son los conceptos más difíciles de aprender para los alumnos?

---

---

---

6. ¿Desde qué grado considera que deben formarse los conceptos matemáticos?

---

---

---

7. ¿Qué actividades considera que son útiles para la formación de conceptos? ¿cuáles las menor útiles?

---

---

---

## VI. Solución de problemas

1. ¿Considera necesario la tarea de solución de problemas para la enseñanza de las matemáticas en la primaria?

---

---

---

2. ¿Qué implica la solución de problemas?

---

---

---

3. ¿Qué actividades utiliza para enseñar la solución de problemas?

---

---

---

4. ¿Cuáles son las dificultades que tienen los alumnos para solucionar problemas?

---

---

---

5. ¿Utiliza actividades colaborativas o individuales para la solución de problemas?

---

---

---

6. ¿Qué actividades considera que facilitan la solución de problemas?

---

---

---

7. ¿Qué actividades considera que obstaculizan la solución de problemas?

---

---

---

8. ¿Desde qué grado deberían enseñarse a solucionar problemas?

---

---

---

9. ¿Qué tipos de problemas solucionan sus alumnos?

---

VII. Profesionalización docente:

1. ¿Usted cree que necesita alguna actualización o formación para mejorar o modificar su forma o método de enseñanza de matemáticas?

---

---

---

2. ¿Podría identificar alguna teoría que respalde su forma de enseñar?

---

---

---

3. ¿Le gustaría modificar algo en su forma de enseñar o método?

---

---

---

4. ¿Las tareas que usted utiliza para formar los contenidos impactan en alguna otra materia o en la vida del alumno?

---

---

---

5. ¿Por qué cree usted que existen tantas dificultades en los alumnos al entrar a secundaria?

---

---

---

Apéndice 2.

**Protocolo de evaluación para alumnos de tercer grado de primaria**

**I. Concepto de número y Sistema numérico**

a. - ¿Qué es un número? ¿Para que sirven los números? ¿Qué números conoces?

---

---

---

b. - ¿Qué es el sistema numérico decimal?

---

---

---

c. - ¿Qué es la unidad?

---

---

---

d. - ¿Qué es la decena?

---

---

---

e. - ¿Qué es la centena?

---

---

---

f. -En el número 182, ¿qué dígito es menor?

---

---

---

g. -En el número 15974, ¿qué dígito es mayor? ¿cuál es menor? ¿por qué?

---

---

---

h. - ¿Qué es más dos cuartos de hora o media hora?

---

---

---

i. -Si fuera el sistema de 3, ¿cuántas unidades y cuántas decenas tuviera el número 13 (se puede dar apoyo de cerillos)?

---

---

---

j. - ¿Cuántos gramos hay en 3 kg? ¿Cuántos kg en 300 gr?

---

---

---

k. - ¿qué pesa más 100 gr de algodón o 100 gr de acero? ¿la cantidad de algodón y acero sería la misma? ¿por qué?

---

---

---

l. - ¿Qué pesa más un litro de leche o un litro de crema? ¿la cantidad de leche y crema sería la misma? ¿por qué?

---

---

---

## II. Operaciones aritméticas

- a.  $57-19=$
- b.  $115+23=$
- c.  $15 \times 4=$
- d.  $102 \times 73=$
- e.  $360/6=$
- f.  $42/7=$
- g.  $2.54 + 45.019$
- h.  $501-49=$

## III. Solución de problemas

a) Renata y Daniel fueron al mercado y compraron lo siguiente: 2 kilos de manzana, 300 gramos de azúcar y 1 kilo de pasta, ¿cuántos gramos compraron en total?

---

---

---

b) Un automóvil avanzó 98 km durante 8 horas. ¿cuántos kilómetros hace el tren en una hora?

---

---

---

c) Durante 12 días se construyó una carretera de 48 kilómetros, ¿cuántos carros pasaron durante un día?

---

---

---

d) La biblioteca "El Principito" tiene 40 libros repartidos en 5 estantes. Si la Maestra Lupita coloca la misma cantidad de libros en cada estante, ¿cuántos libros hay cada estante?

---

---

---

e) Gaby tiene tres veces más la edad de su hermana Sofía. Si Sofía tiene 7 años, ¿cuántos años tiene Gaby?

---

---

---

f) En el Museo del Niño la primera sala tiene 64 actividades lúdicas y en la segunda hay 4 veces menos. ¿Cuántas actividades lúdicas hay en la segunda sala?

---

---

---

g) Axel y Daniel jugaron tres rondas de penales. Si en la primera ronda quedaron 20 a 18 goles, en la segunda 35 a 20 y en la última 15 a 50, ¿quién ganó? ¿por cuántos goles?

---

---

---

h) En una caja había 19 bombones. Se comieron una parte de los bombones. Quedaron 11 bombones. ¿cuántos bombones se comieron?

---

---

---

i) Redacta un problema con los siguientes datos: 59 minutos, 3 metros.

---

---

---

j) Redacta un problema con los siguientes datos: 18 unidades, 6 decenas, 4 centenas.

---

---

---

k) Inventa un problema y soluciónalo.

---

---

---

l) Inventa un problema para tu compañero.

---

---

---

Actitud hacia las matemáticas:

a) ¿cuál es tu materia favorita?

---

---

---

b) ¿Te gustan las matemáticas? ¿Por qué? ¿cómo crees que podrían gustarte?

---

---

---

c) ¿Cómo te enseña tu maestra las matemáticas?

---

---

---

d) ¿Qué actividades realizas para aprender matemáticas?

---

---

---

e) ¿cuándo tienes dudas qué haces para realizar tus actividades de matemáticas?

---

---

---

f) ¿cómo te califican en matemáticas?

---

---

---

### Apéndice 3

#### Hoja de observación de clase

Dimensión	Subdimensión	Presentación del tema de la clase	Tareas en clase	Tipo de ayudas	Tipo de errores	Tareas no relacionadas
Organización de conceptos	General-particular					
Orientación	Completa					
	Generalizable					
	Independiente					
Acciones	Material					
	Perceptivo					
	Verbal externo					
Tipos de interacciones	Maestra-alumno					
	Alumno-alumno					

#### Apéndice 4.

Análisis de resultados por instrumentos aplicados en los tres colegios

A) Resultados de acuerdo a instrumentos del colegio K

Elementos del Método de enseñanza		Observación de clase	Entrevista a maestra	Evaluación a niños
Sistema de conceptos	-Científicos (características esenciales) -Empíricos Ausencia de conceptos	Uso de concepto de número para introducir la fracción	Identificación de conceptos matemáticos generales	Identificación y aplicación de características generales
Tipo de orientación	-Dependiente-Independiente -General- <i>particular</i> -Completa-incompleta	Uso de tarjetas Instrucciones que permiten solucionar varios ejercicios	Independiente General	Independiente Apoyos verbal externo y perceptivo esquemático
Sistema de acciones	-Materiales-materializadas -Perceptivas (uso de imágenes o esquemas) -Verbales (descripción verbal de acciones; uso de algoritmos-escritura) -Internas (cálculo mental)	Uso hojas para representar la medida	Acciones en el plano materializado, perceptivo y verbal externo	Uso de dibujo y algoritmos para solucionar problemas
Interacción entre alumnos	Alumno-objeto Alumno-alumno Maestra-alumno	Solución de ejercicios de forma individual y por parejas	Uso constante de tareas individuales y colectivas	Tareas individuales y grupales
Actitud	Agrado hacia las actividades de matemáticas  Desagrado hacia las actividades de matemáticas  Agrado hacia actividades no propias de matemáticas pero si en la clase de matemáticas (Uso de TIC)	Se muestran participativos se ayudan	Muestra las actividades con agrado	Refieren que las matemáticas son su asignatura favorita

B) Resultados por instrumento del Colegio S

Método de enseñanza		Observación de clase	Entrevista a maestra	Evaluación a niños
Sistema de conceptos	<p>Científicos (características esenciales)</p> <p><b>Empíricos</b></p> <p>Ausencia de conceptos</p>	<p><b>Operativos</b></p> <p>Empíricos</p>	<p>Identificación de operaciones básicas</p> <p>“los conceptos que se forman en tercero de primaria son las <b>operaciones básicas</b>”</p>	<p>Algunos alumnos identifican la <b>medida</b> como característica del número y dominan el sistema numérico decimal</p> <p>En su mayoría se observa mayor habilidad en el <b>componente operativo</b> (no siempre se relaciona con el éxito en la solución del algoritmo-componente simbólico)</p>
Orientación	<p><b>Dependiente-Independiente</b></p> <p>General-<b>particular</b></p> <p>Completa-<b>incompleta</b></p>	<p>En su mayoría es incompleta, concreta y <b>dependiente</b></p> <p>Investigación del conocimiento previo de los alumnos, descripción del <i>tema (la balanza)</i>, ejemplo del tema mediante ejercicios,</p>	<p>Explicación del tema, identificación del conocimiento previo, uso de ejercicios, escritura del apunte (copia), solución de ejercicios en el libro y cuaderno.</p>	<p>Requiere del <b>apoyo constante</b> de la investigadora para identificar la pregunta final y operación correcta en los problemas matemáticos.</p> <p>Algunos casos, requiere de la <b>ayuda conjunta</b> para organizar y concluir el algoritmo (división).</p>

		solución de ejercicios de forma independiente (grupal), verificación de resultados (grupal).		Además, en su mayoría había <b>respuestas por ensayo y error.</b>
Sistema de acciones	<p>Materiales-materializadas</p> <p>Perceptivas (uso de imágenes o esquemas)</p> <p><b>Verbales</b> (descripción verbal de acciones; uso de algoritmos-escritura)</p> <p>Internas (cálculo mental)</p>	Verbales externas (escritura, números impresos)	<p>Ejercicios constantes, enseñar conceptos principales, explicación del tema, lectura de ejercicios, <b>solución de ejercicios escritos</b>, uso de colores para recordar mejor, repetición y memorización.</p> <p>Además de <b>la identificación de palabras claves</b> para la solución de problemas.</p>	<p>Uso de <b>cálculo mental</b>, con algunas dificultades para solucionarlo con el algoritmo.</p> <p><b>Dibujo</b> para la conversión de sistema de medición y solución de problemas que implican tiempo y velocidad con ayuda de la investigadora.</p> <p><b>Algoritmos</b> para solucionar problemas (suma, resta y multiplicaciones), aún no se consolida la división ni la multiplicación de decenas por unidades por lo que comenten errores en los resultados.</p>

<p>Forma de interacción</p>	<p>Alumno-objeto</p> <p><b>Alumno-alumno</b></p> <p><b>Maestra-alumno</b></p>	<p>Alumno-objeto (solo acciones perceptivas, números impresos)</p> <p>Solución de ejercicios de forma <b>individual</b></p> <p>Alumno-alumno (verificación de resultados)</p> <p>Maestra-alumno (explicación del tema, incitación de respuestas, repetición)</p>	<p>“Trabajo en grupo e individual, apoyo a compañeros”</p>	<p>Tareas individuales (la evaluación fue personal)</p> <p>Los alumnos <b>expresan su agrado hacia su maestra</b>, no la cambiarían, les gusta cuando hacen uso de TIC.</p>
<p>Actitud</p>	<p>Agrado hacia las actividades de matemáticas</p> <p>Desagrado hacia las actividades de matemáticas</p> <p>Agrado hacia actividades no propias de matemáticas pero si en la clase de matemáticas (Uso de TIC)</p>	<p>Los alumnos se muestran <b>participativos</b></p> <p>La maestra se muestra <b>colaborativa</b> con sus alumnos, se ayuda en los alumnos para que repartan algún material.</p>	<p>“Explico las actividades con adecuada actitud”</p>	<p>Refieren que las matemáticas son su asignatura favorita.</p>

C) Resultados por instrumento del Colegio Montessori

Método de enseñanza		Observación de clase	Entrevista a maestra	Evaluación a niños
Sistema de conceptos	<p><b>Científicos (definiciones)</b></p> <p><b>Empíricos</b></p> <p>Ausencia de conceptos</p>	<p><b>Conceptos a partir de definiciones y empíricos a través de datos sensoriales, sin relación entre conceptos matemáticos.</b></p> <p>Componentes de la multiplicación: factores y producto</p> <p>Uso de medidas sin relación con la cantidad ni sistemas.</p>	<p>Identificación del sistema de medición:</p> <p>“desarrollo de las <b>habilidades cuantitativas y lógicas</b>”</p> <p>“enseñanza del <b>sistema numérico</b>, operaciones básicas”.</p>	<p>Los alumnos logran <b>identificar las medidas concretas y siempre de un mismo tipo en presencia del material sensorial concreto.</b></p> <p>También <b>relacionan el número con una cantidad y que representa algo</b> (componente simbólico)</p>
Orientación	<p><b>Dependiente-Independiente</b></p> <p><b>Concreta-generalizada</b></p> <p><b>Completa-incompleta</b></p>	<p>En su mayoría es completa, particular y <b>dependiente del maestro y del material.</b></p> <p>Construcción del conocimiento mediante la observación de modelos</p>	<p>“Presentación del tema con el material, los alumnos realizan las acciones con el material concreto”</p>	<p>Los alumnos responden las tareas de forma <b>dependiente</b>, se apoyan en su material.</p> <p>Requieren de la explicación de cada tarea. Realizan</p>

		<p>materializados (material bancubi o Montessori).</p> <p>Los alumnos proponen y resuelven sus tareas.</p>		<p>correctamente las tareas mediante el uso del material bancubi y Montessori.</p>
Sistema de acciones	<p><b>Materiales-materializadas</b></p> <p><b>Perceptivas</b> (uso de imágenes o esquemas)</p> <p><b>Verbales</b> (descripción verbal de acciones; uso de algoritmos-escritura)</p> <p>Internas (cálculo mental)</p>	<p>Materiales (cubos bancubi, círculos y cadenas Montessori)</p> <p>Perceptivas (observación de modelos materializados, dibujos de los cubos bancubi)</p> <p>Verbales externas (solución de acertijos, preguntas constantes)</p>	<p>“uso de la observación constante ¿vamos a descubrir si todos vemos lo mismo?”</p> <p>“explicación del tema con el material bancubi y Montessori)”</p>	<p>Uso del <b>material</b> para solucionar problemas que implican multiplicación, repartición y restas.</p> <p><b>Dibujo</b> para repartir.</p>
Forma de interacción	<p>Alumno-objeto</p> <p>Alumno-alumno</p>	<p><b>Alumno-objeto</b> (acciones de conteo, repartición, aumento, medición, comparación)</p> <p>Solución de ejercicios de forma <b>individual</b></p>	<p>“alumnos realizan sus tareas ellos mismos y el contenido es a su ritmo, ellos ayudan a sus demás compañeros”</p>	<p>Solución de tareas con apoyo del material</p> <p>El investigador ofrecía el apoyo, sin el cual los niños no logran operar</p>

	Maestra-alumno	<p><b>Alumno-alumno</b> (apoyo para resolver tareas, compartir temas de interés)</p> <p><b>Maestra-alumno</b> (explicación del tema, acompañamiento)</p>		
Actitud	<p>Agrado hacia las actividades de matemáticas</p> <p>Desagrado hacia las actividades de matemáticas</p> <p>Agrado hacia actividades no propias de matemáticas pero si en la clase de matemáticas (Uso de TIC, juegos)</p>	<p>Los alumnos muestran agrado hacia las tareas de matemáticas.</p> <p>Los alumnos piden a su maestra de matemáticas continuar trabajando</p>	<p>“El maestro debe transmitir las matemáticas con la mejor actitud... y creatividad”</p> <p>“los alumnos deben mostrar su interés por aprender”</p>	<p>Refieren que las matemáticas son de su agrado, aunque dos alumnas refirieron que les gustaría las matemáticas si fueran más fáciles.</p>